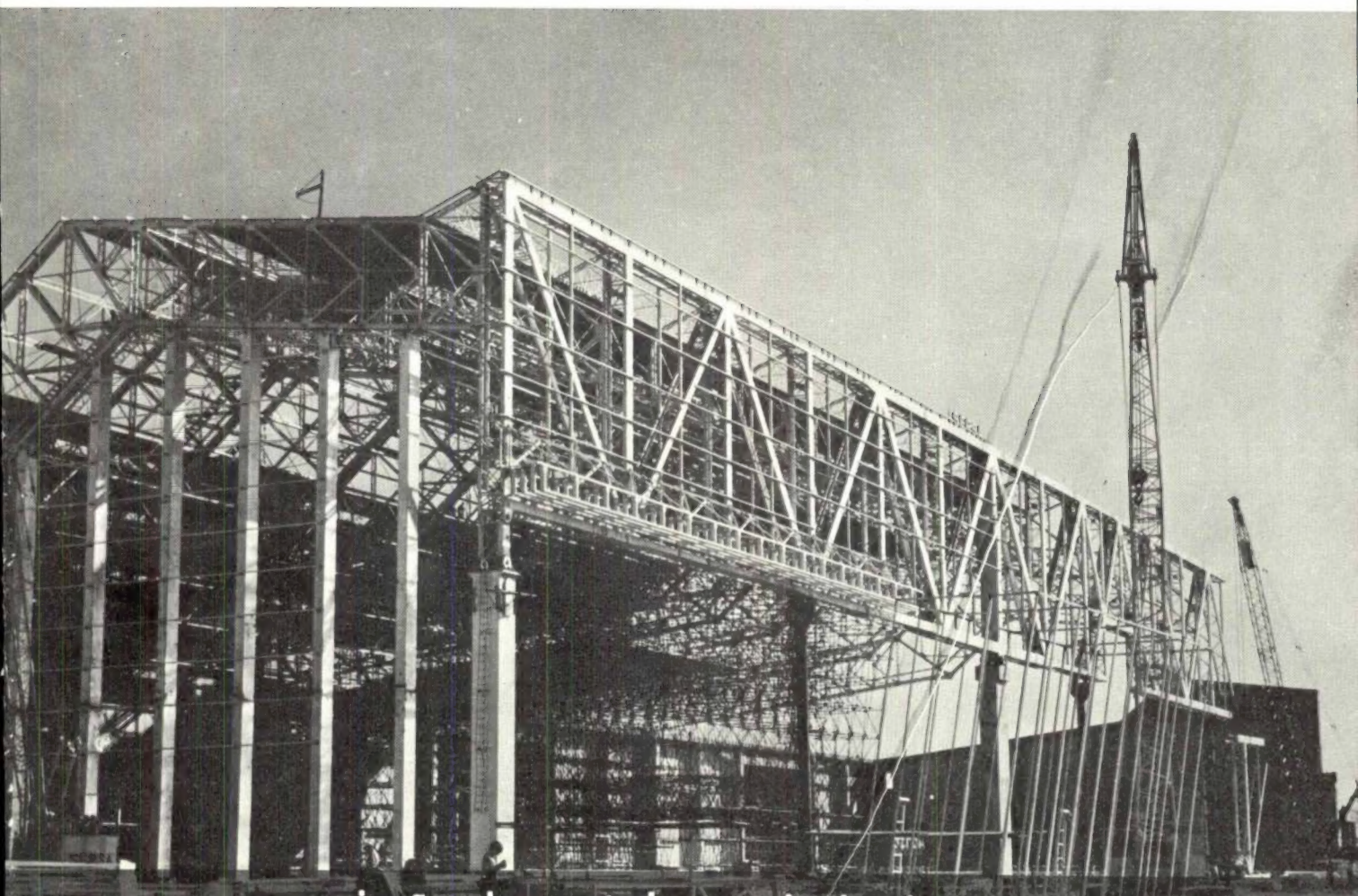
técnica



99/400

associação dos estudantes do instituto superior técnico

junho/julho 1970 revista de engenharia

VARÕES DE AÇO DE ALTA RESISTÊNCIA PARA BETÃO ARMADO TIPO A. 40
(«Heliaço» e «SNT 40»)

TENSÕES DE SEGURANÇA
Ra = 2400 kg/cm²
e
Ra = 4000 kg/cm² (SISMOS)

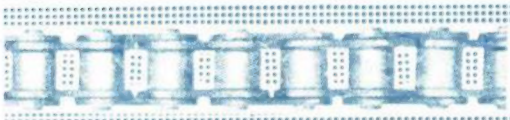
Literatura e Tabelas de Cálculo fornecidas gratuitamente

HELIAÇO, LDA.

R. DE S. JULIÃO, 41, 4.º D. — LISBOA

Tel.: 36 78 17 - 32 37 06 - 36 94 77

REGINA-EXTRA
REX-REGINA



CORRENTES
para
indústria,
agricultura, etc.

AUTO-LUSITANIA
ALFREDO DUARTE, L.da
AVENIDA DA LIBERDADE, 73-77
LISBOA

UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA
S. A. R. L.

SEDE

Rua de Alexandre Herculano, 244 — PORTO

TELEFONES: 2 76 76/9 e 2 18 38

DELEGAÇÃO

Rua Rosa Araújo, 35 — LISBOA

TELEFONES: 53 11 81/7 e 53 33 33

•

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

•

A UNIÃO ELÉCTRICA PORTUGUESA, S. A. R. L. distribui, pela mais extensa rede de alta tensão em Portugal, (cerca de 3 500 km) energia eléctrica em 70 concelhos, nos distritos de VIANA DO CASTELO, BRAGA, PORTO, AVEIRO, COIMBRA, VISEU, LEIRIA, SETÚBAL e ÉVORA.

CIMENTO SECIL

Fábrica:

Outão — Setúbal

Telef. 228824/5

Escritório:

R. do Comércio, 56-3.º

LISBOA 2

Telef. 328201/2/3

técnica

NÚMERO 399-400 JUNHO-JULHO DE 1970 ANO XLV VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

Director

João Soares Alves

Administrador

Silvério de Sousa Mendes

Secretário

Rui Coutinho Torrinha

Chefe de Redacção

Vladimiro de Oliveira

Redactores

Alvaro Manuel Cortez
Francisco Toco Emílio
Henrique Nunes Garcia
Maria Manuela Mota

Assinaturas

		5 Nos.	10 Nos.
Continente e Ilhas	—	85$00	160$00
Ultramar, Brasil e Espanha	—	95$00	170$00
Estrangeiro	—		180$00

Número avulso — 25$00

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos seus autores.

Composto e impresso na Tipografia Jorge Fernandes, Lda. — Rua da Cruz dos Poiais 108 — Lisboa

SUMÁRIO

435 *E. R. DE ARANTES E OLIVEIRA* — **Theoretical foundations of the finite element method.**
Fundamentos teóricos do método de elementos finitos.

455 *B. B. ARGENT* — **Progressos recentes na indústria do aço.**
Recent techniques of the steel industry.

467 *DUARTE-RAMOS* — **Teoria da quantificação das actividades profissionais e sua aplicação à engenharia electrotécnica.**
Quantification theory in professional activities and its application in electrical engineering.

475 *L. MARTINS DOS SANTOS* — **Ensaios em modelo reduzido do galgamento das ensecadeiras de Cabora-Bassa.**
Overtopping test in model of Cabora-Bassa cofferdams.

487 *DUARTE SILVA E MARÇAL GRILO* — **O ensaio modificado de Cook e Larke.**
Cook and Lark's test.

493 *ANTERA SEABRA E MARIA TAVARES CRAVO* — **Casos de corrosão de materiais de construção.**
Corrosion in building materials.

513 *M. AUGUSTO LOPES* — **Pontes em curva — Contribuição para o seu cálculo.**
Curved bridges — Contribution for its calculation.

492 **Do Mundo Técnico**

519 **Bibliografia**

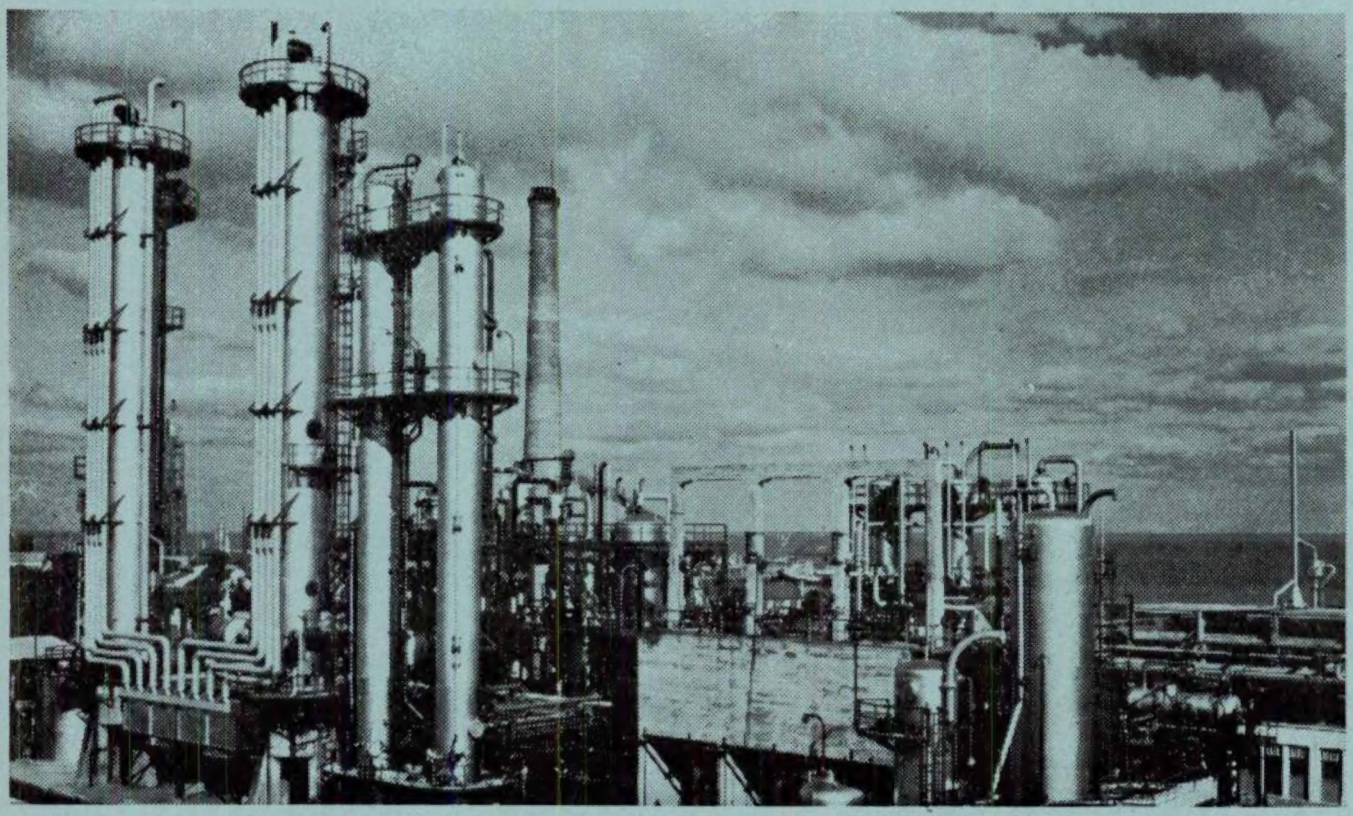
CAPA: Estrutura do Hangar para Boeings 747 (Aeroporto de Lisboa) — Construções Técnicas, Lda.

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
A. Johnson & Co (Portugal), Ltd.	XXXIV
Auto-Lusitânia	2.ª da capa
Atlas-Copco	XXVII
Centro Técnico Hospitalar	XXXV
Cimento Secil	2.ª da capa
Companhia de Cimentos Brancos	VI
Cometna	XXV
Construções Técnicas	XVII
Construções Schréder	XX
Electrotécnicos Reunidos	XV
Electro-Arco, Lda.	II
Empresa de Cimentos de Leiria	XXVI e XXXVI
Empresa Electro Cerâmica	XXXI
Empresa de Produtos Asfálticos	X
Empresa de Sondagens e Fundações Teixeira Duarte, Lda.	3.ª da capa
Empresa Técnica de Equipamentos Eléctricos	XI
Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações	XVI
Engil	XXXIII
Fanafel	XVI
Fundações Franki, Lda.	I
Guedes & Almeida, Lda.	VIII e XXVIII
Harker Sumner	XIV
Heliaço	2.ª da capa
Hoesch Portuguesa	XXIX
Isola	XXVII
Isolux	XXX
Jayme da Costa, Lda.	XIX
Johann Keller	XXX
J. F. Azevedo e Silva	VII
J. Roma	XXX
Livros Técnicos	XXIX e XXXII
MAGUE	XIII
Mendes de Almeida, S. A. R. L.	XXI
Mobil Oil	XVIII
Novobra, Lda.	XXV
Plessey Automática Eléctrica Portuguesa	IV
Philips Portuguesa	V
Rotring	XXXII
Siemens	XII
Soc. Electricidade Brown Boveri	4.ª da capa
Soc. Amadeu Gaudêncio	XXXI
Soc. Industrial Metalúrgica	XXXII
Sociedade Portuguesa Cavan	VI
S. K. F. Lda.	XXII
Sondagens e Fundações A. Cavaco	II
Sondagens Ródio, Lda.	XXV
Sopecate	II
Standard Eléctrica	IX
Tudor	XXIII
União Eléctrica Portuguesa	2.ª da capa
Verlinde	XXVIII
Wild Portugal, Lda.	III

espiral

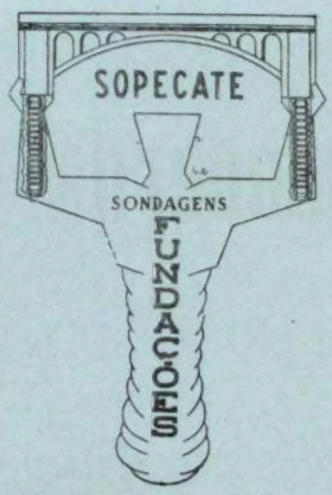
na base da construção moderna: estacas FRANKI, moldadas no solo.



A elevada gama de diâmetros das estacas Franki permite a melhor adaptação a cada problema concreto de fundações, desde a construção mais ligeira até à de grande concentração de cargas muito elevadas. Material permanentemente actualizado e pessoal com especialização constantemente aprofundada garantem a segurança, rapidez e economia das fundações executadas.

FRANKI

Consulte-nos: FUNDAÇÕES FRANKI, LDA. — PORTUGAL



sopecate

sondagens - fundações

ESCRITÓRIO: RUA DO ARSENAL 146 2.º TELEFONES 3 40 10 - 32 02 08 LISBOA

- ESTUDOS, PESQUISAS E CAPTAÇÕES DE ÁGUA
- SONDAGENS
- REBAIXAMENTO DE NÍVEIS AQUÍFEROS
- FUNDAÇÕES

SONDAGENS E FUNDAÇÕES A. CAVACO, LDA.

R. RODRIGO DA FONSECA, 62, R C ESQ. — LISBOA - 1
- TELEF. 56 11 71/72/73

ELECTRO-ARCO, L.DA

ELÉCTRODOS + POSTOS + ACESSÓRIOS
PARA A SOLDADURA ELÉCTRICA

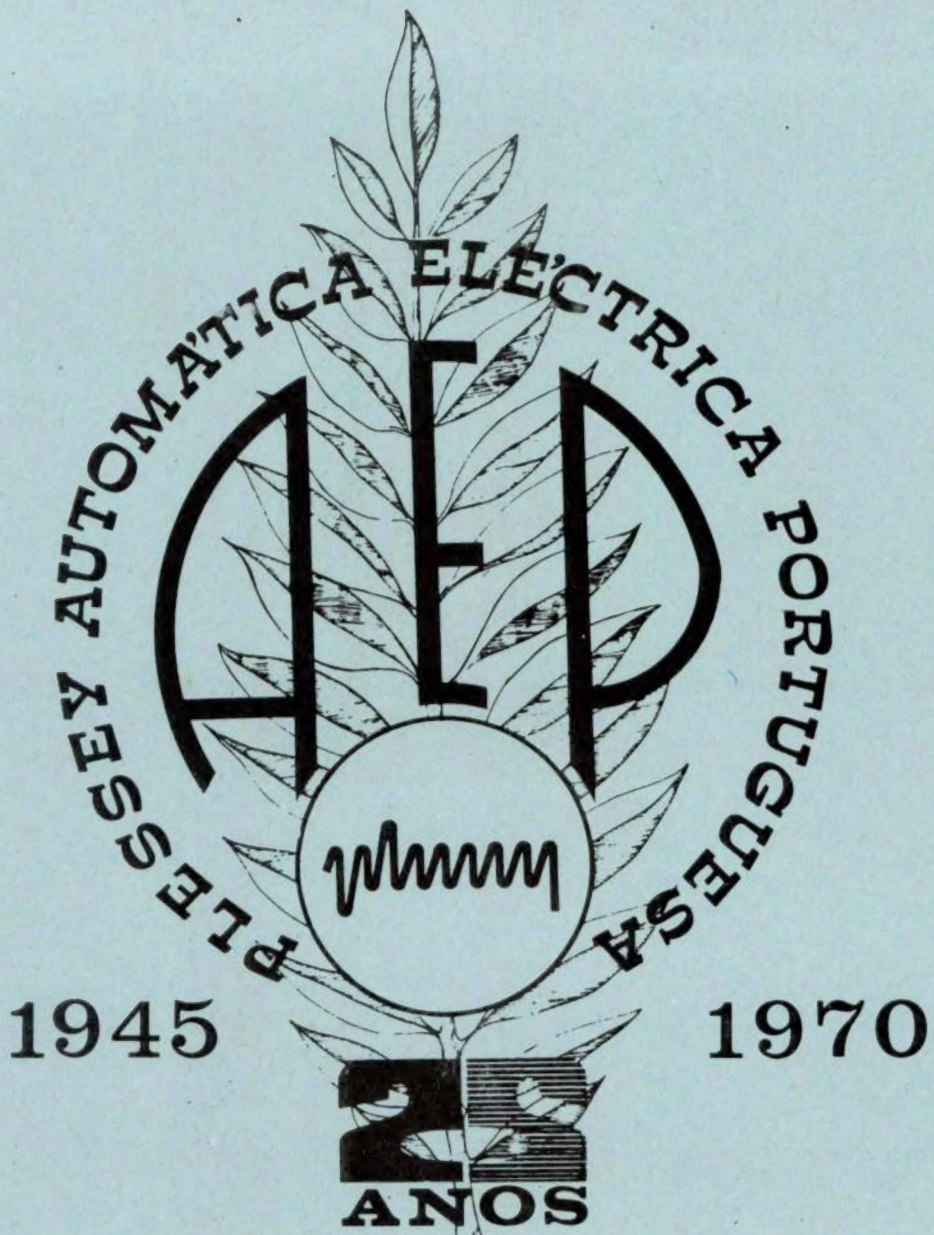
MATERIAL APROVADO PELOS
LLOYD'S REGISTER OF SHIPPING
BUREAU VERITAS
GERMANISCHER LLOYD

LISBOA
Rua Silva Carvalho, 239
Tels. 68 36 49 - 68 48 93

FÁBRICA E LABORATÓRIOS
Venda Nova — Amadora
Tels. 97 06 13 - 97 17 33

PORTO
Rua do Bolhão, 216
Tel. 2 12 77 - 39 44 73

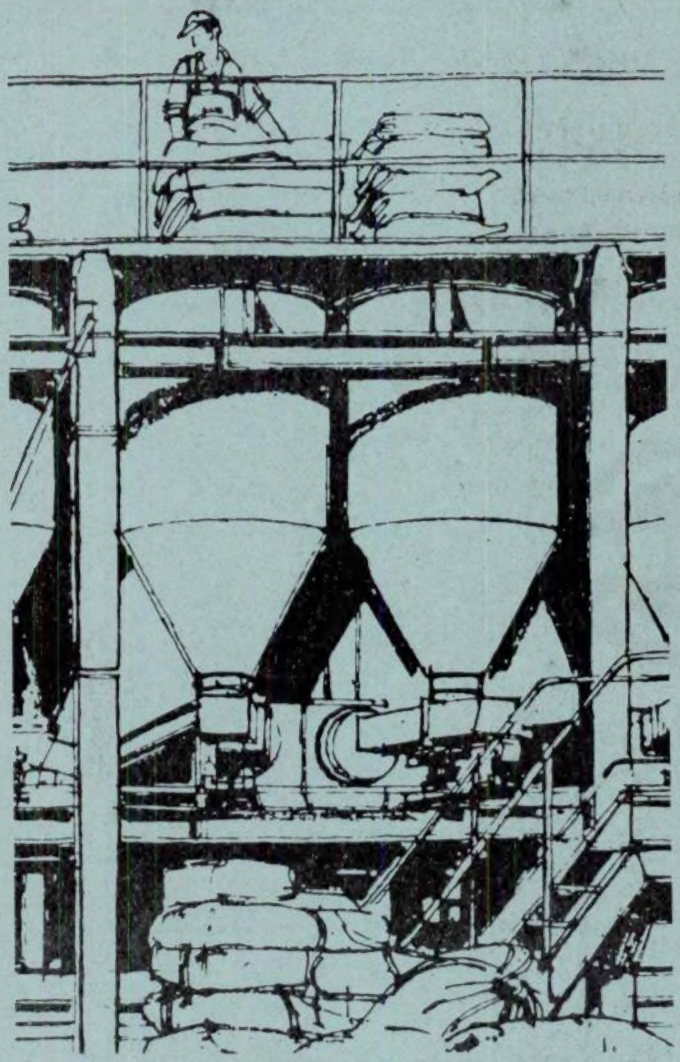
Temos apenas uma qualidade:
Primeira.
WILD
HEERBRUGG
SWISS
Os estojos de desenho WILD são confeccionados de aço crómio polido inoxidável.
Isto significa precisão, mesmo após uso de longos anos.
Um exemplo da mais alta perfeição: O traçado direito e preciso do compasso WILD. O mesmo possibilita um trabalho seguro. A posição do ângulo pode ser fixada com rapidez e segurança sem a mínima folga nas pernas do compasso.
A aplicação de materiais sòmente da melhor qualidade e o máximo cuidado no acabamento, justificam a reputação mundial de primeira qualidade, Made in Heerbrugg.
WILD
HEERBRUGG
Aparelhos para Fotogrametria
Aparelhos topográficos
Microscópios

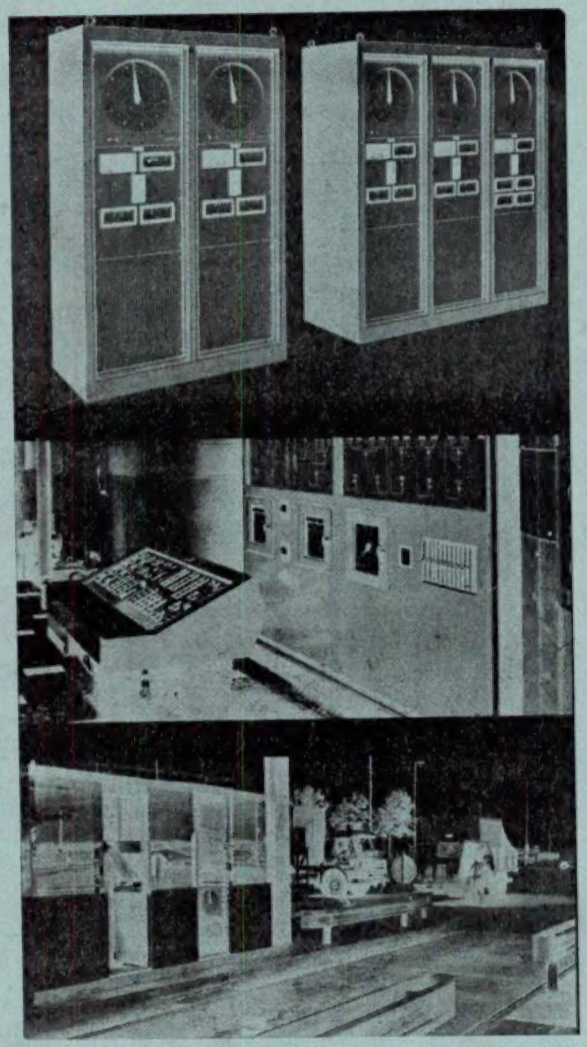


AO SERVIÇO DAS TELECOMUNICAÇÕES

fabricantes de:

telefones de vários tipos • estações automáticas completas STROWGER e CROSSBAR • equipamento de TELEX • comutadores manuais • PPC (PBX), CAP (PAX) e PPCA (PABX) • memórias magnéticas para computadores electrónicos •••••





Mais de 5000 instalações de pesagem electrónica

em uso em todo o mundo foram concebidas e realizadas pelos engenheiros da Philips. Muitas trabalham em meios ambientes altamente agressivos — que fariam fracassar qualquer sistema de pesagem mecânica se alguém tivesse a ideia de os fazer trabalhar em tais condições.

Os sistemas de pesagem electrónica Philips são estanques ao pó e à humidade e insensíveis ao choque e às vibrações. Têm uma vida pràticamente ilimitada, mantendo-se a sua precisão ao longo do tempo. As células de pesagem, devido às suas reduzidas dimensões, tornam muito fácil a montagem mesmo em espaços exíguos.

Não requerendo as alavancas normalmente usadas na pesagem mecânica, a pesagem electrónica poupa espaço e dinheiro, dado que não exige fundações caras.

As ligações entre as células de pesagem e o aparelho indicador fazem-se por meio de cabos eléctricos o que permite tornar a posição daquele independente do local da pesagem.

O equipamento de pesagem Philips é de concepção modular possuindo entrada e saída digitais.

Se necessitar de um sistema de pesagem em plataforma, em tanques ou silos, em telas transportadoras ou de um equipamento para doseamento automático de produtos, peça informação detalhada à

DEPTº INDÚSTRIA

PHILIPS

PHILIPS PORTUGUESA, S.A.R.L.

AV. DUARTE PACHECO, 6 - LISBOA - TELEFS. 65 45 21/8 • RUA FERNANDES TOMÁS, 760-764 - PORTO - TELEFS. 2 74 47/8/9

O EMPREGO DO CIMENTO BRANCO...

permite acabamentos mais perfeitos, mais duradouros e muito mais económicos

Estude a vantagem do emprego do

CIMENTO BRANCO LUSO

Consulte os distribuidores gerais

No Sul: **SCIAL** — T. do Corpo Santo, 15 — Telef. 32 73 77 — Lisboa
No Norte: **SCIAL** — R. do Bonjardim, 205 — Telef. 2 5779 — Porto

POSTES DE BETÃO PARA LINHAS ELÉCTRICAS
MOSAICOS E AZULEJOS
COLUNAS PARA ILUMINAÇÃO PÚBLICA
MANILHAS PARA ESGOTOS

SOCIEDADE PORTUGUESA
Carvam

RUA D. ESTEFÂNIA, 94-A-LISBOA-1-TELEF. 47812-50129

Construiu nas suas oficinas e instalou no

BANCO DE ANGOLA

FILIAL DO PORTO

Quadro de comando e controle de instalação de Ar condicionado

Quadro geral de baixa tenção

Posto de transformação blindado e pré-fabricado 15kV/400/231v

Executou ainda:

- **O projecto de electricidade**
- **A instalação eléctrica do edifício**

J.F. DE AZEVEDO E SILVA & Cª LDA

Rua S. Francisco de Sales, 2-1º, Tel. 654165-Lisboa

WABCO

WESTIN'GHOUSE
AIR BRAKE COMPANY

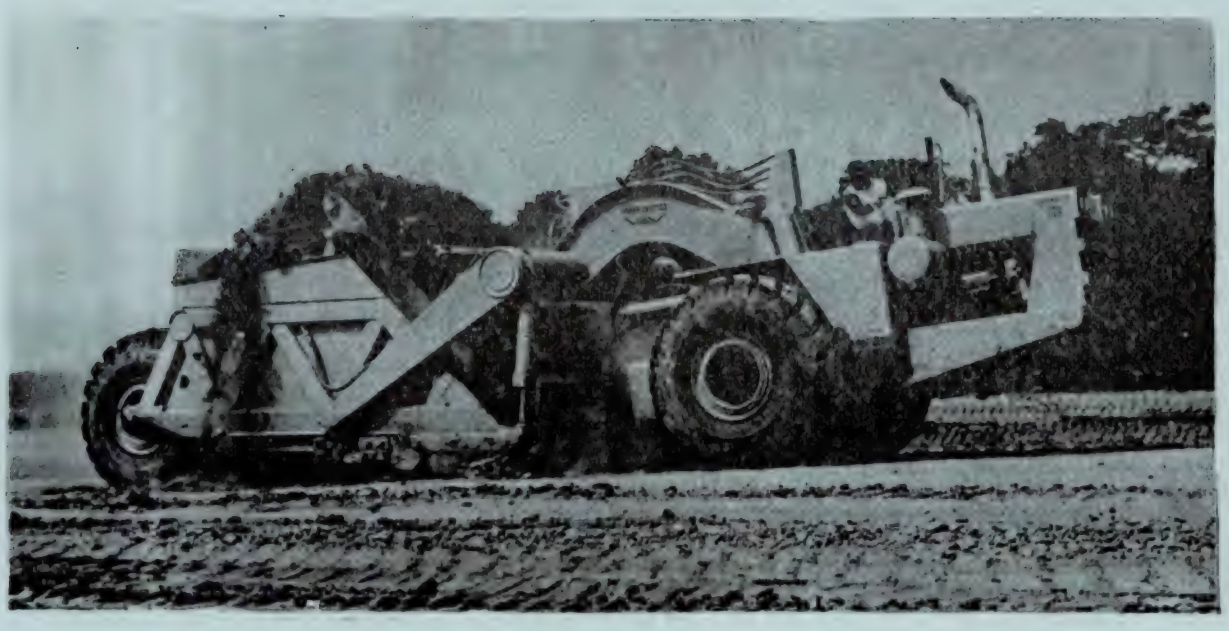
Construction Equipment Division
Peoria (Illinois) 61601

MOTO-SCRAPERS AUTO-CARREGADORES

CAPACIDADE DE 11, 21 E 31 JARDAS CÚBICAS

NÃO NECESSITA DE TRACTOR PARA EMPURRE!
UMA SÓ MÁQUINA... UM SÓ OPERADOR...

Escarifica... Carrega... Transporta... Descarrega... Em terrenos de toda a natureza!



DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO

GUEDES & ALMEIDA LDA.

Rua Áurea, 181-2.° — LISBOA-2 — TELEFS. 32 50 80 e 32 78 45

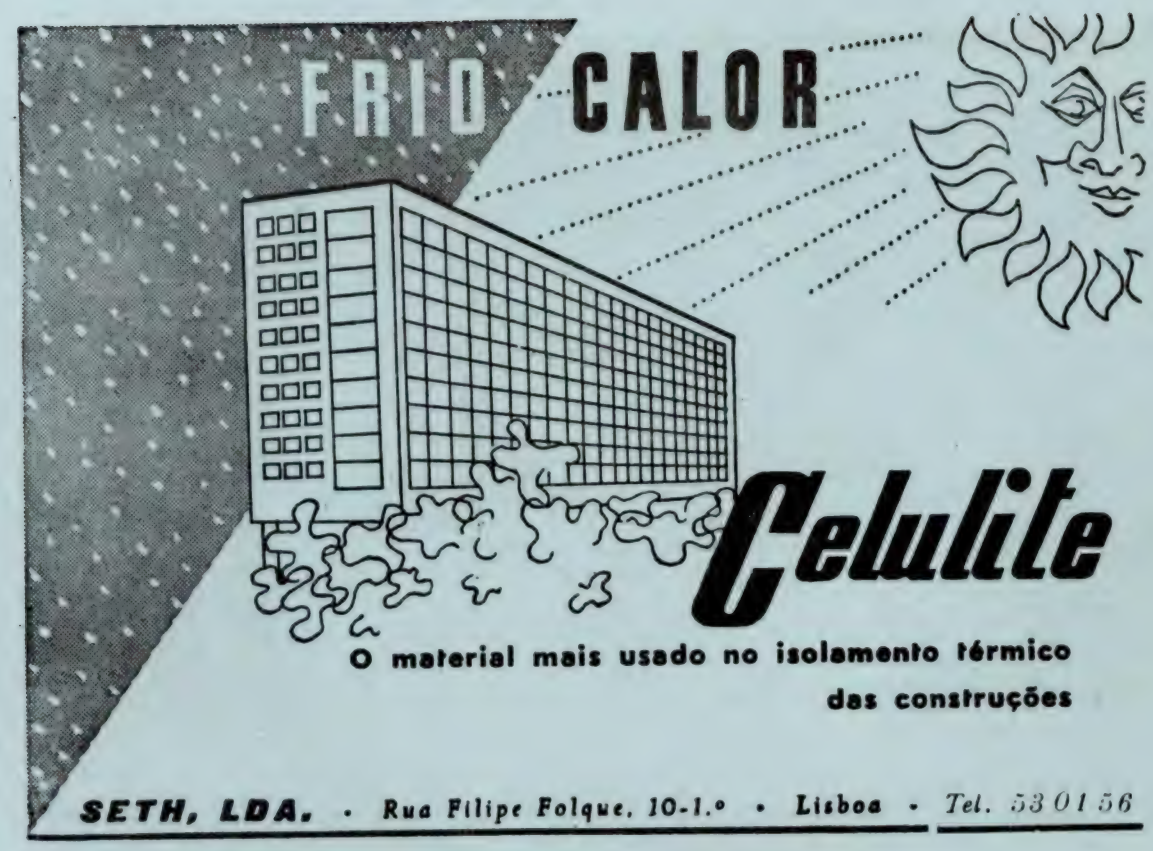
A STANDARD ELÉCTRICA PROJECTA-SE NO MUNDO

Na vanguarda da indústria das Telecomunicações e Electrónica, a Standard Eléctrica, dimensionada ao âmbito mundial, ocupa uma prestigiosa posição nos mercados estrangeiros. A eficiência de uma administração actualizada, a capacidade técnica dos seus engenheiros e o profissionalismo com que todos os empregados encaram as suas responsabilidades, são valores reais e positivos que, de maneira decisiva, contribuem para o engrandecimento da Standard Eléctrica e da indústria nacional. Associada da International Telephone and Telegraph Corporation, um conjunto mundial com cerca de 200 fábricas localizadas em mais de 60 países, a Standard Eléctrica fabrica numerosos produtos, desde os minúsculos transistores e circuitos integrados às grandes centrais telefónicas de serviço público, que são exportados para mais de 30 países entre os quais se destacam: Inglaterra, França, Alemanha, Espanha, Suécia, África do Sul, Brasil e Estados Unidos da América do Norte.

Standard Eléctrica

ITT

TG

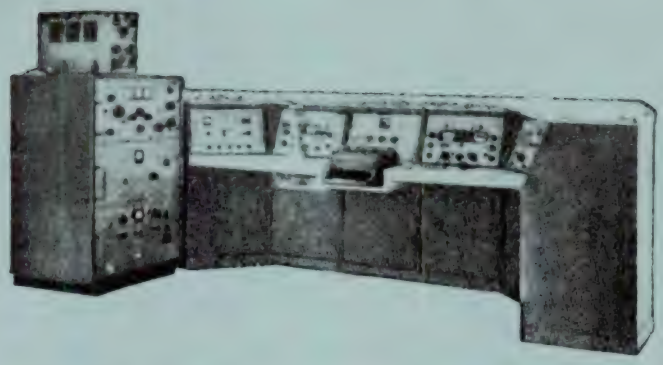


PARA COLAGEM DE TACOS DE MADEIRA USE:

Também próprio para:
impermeabilizar terrenos,
paredes, fundações, etc.

FÁBRICA EM SACAVÉM

RUA FILIPE FOLQUE-10 1º— LISBOA
TELEF. 53 01 56 —TELEG. EPALDA-LISBOA



Comunicações

equipamentos
e sistemas completos

- Cuidadosamente projectados
- Amplamente experimentados
- Completamente integrados

THE TECHNICAL MATERIEL CORPORATION

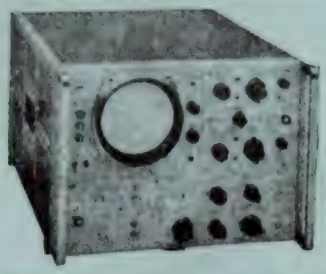
HEWLETT hp PACKARD

aparelhagem electrónica de medida e registo

Osciloscópios, Oscilógrafos, Voltímetros electrónicos, Geradores de sinal, Contadores electrónicos, Registadores digitais, Fontes de alimentação

Registador digital Dymec

Registador Sanborn



Osciloscópio HP

Contador Electrónico HP

TELECTRA EMPRESA TECNICA DE EQUIPAMENTOS ELECTRICOS, S.A.R.L.

SIEMENS

Disjuntor superestreito tipo W

Apenas 17,5 mm de largura

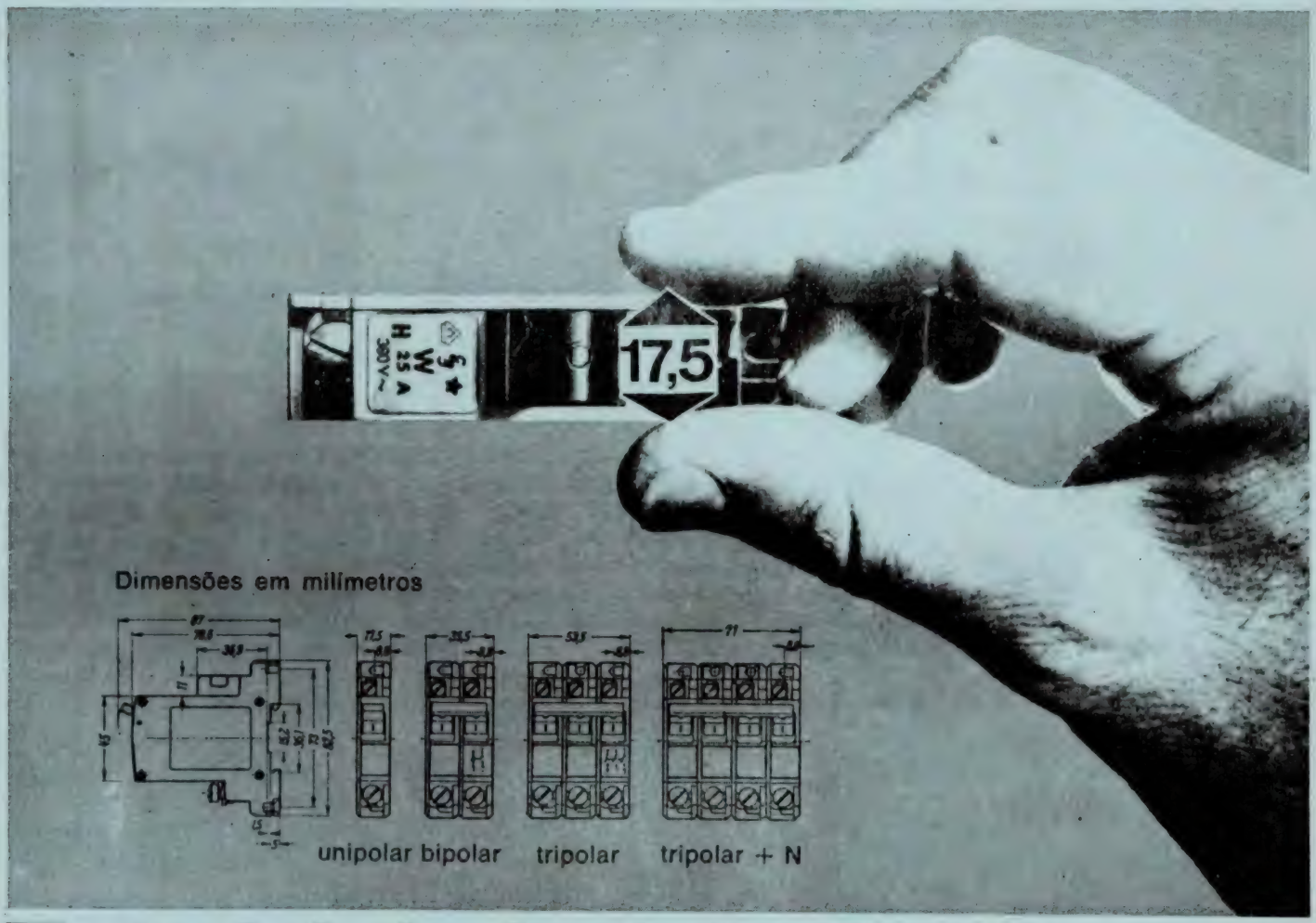
Elevado poder de corte

Disparo eléctrico e electromagnético

Indicação clara da posição de serviço

Montagem rápida por fixação de mola ou fixação convencional sobre qualquer base

Combinações variadíssimas com aparelhagem de medidas normalizadas Siemens



Material de instalação Siemens

SIEMENS - COMPANHIA DE ELECTRICIDADE, S. A. R. L.

LISBOA-1: AVENIDA ALMIRANTE REIS, 65 — TEL. 53 69 21 PORTO: RUA DAS CARMELITAS, 26-2.º — TEL. 2 89 43

técnica

NÚMEROS 399-400 JUNHO-JULHO DE 1970 ANO XLVI VOLUME XXXII PUBLICAÇÃO MENSAL

C. D. U. 517.96

THEORETICAL FOUNDATIONS OF THE FINITE ELEMENT METHOD

por EDUARDO R. DE ARANTES E OLIVEIRA

Professor of the Instituto Superior Técnico, Head of the Applied Mathematics Division, Buildings and Bridges Department of the Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa.

RESUMO

O método dos elementos finitos é hoje o instrumento mais geral, e um dos mais eficientes, da análise de estruturas.

É por outro lado uma técnica matemática geral, e o fim principal deste trabalho será apresentado como tal, utilizando a Análise Funcional como linguagem ideal para a formulação abstracta geral.

É fundamental para quem aplique o método saber prever a convergência para a solução exacta de uma sucessão de soluções aproximadas obtidas empregando elementos cada vez mais pequenos.

No caso de se conseguir conformidade entre elementos, o método dos elementos finitos é um caso particular do de Ritz, de modo que pode assegurar-se a convergência desde que se corrija a complexidade.

Um critério geral de complexidade é pois justificado neste trabalho. Tal critério exige que as componentes do campo, e todas as suas derivadas de ordem não maior que a da derivada de maior ordem que intervenha na expressão da densidade da energia de deformação, possam tomar qualquer valor constante dentro do elemento.

Prova-se finalmente que um tal critério é também um critério de convergência, isto é, uma condição suficiente de convergência, mesmo em casos em que a conformidade entre elementos não se verifique.

SYNOPSIS

The finite element method is nowadays the most general and one of the most powerful tools for the analysis of structures.

It is also a general mathematical technique and the main concerne of the paper is to present it in this light. Functional Analysis is used as the ideal frame for a general abstract formulation.

The ability to predict convergence to the exact solution of a sequence of approximate solutions obtained from patterns of finite elements with decreasing size is fundamental in the application of the method.

In case conformity between elements is obtained, the finite element method is a particular case of Ritz's method, so that convergence can be ensured as far as completeness is achieved.

A general completeness criterion is justified in the paper. Such criterion requires that the field components and all their derivatives, of order not higher than the highest order of derivative entering into the energy density expression, can take up any constant value within the element.

It is finally proved that such criterion is also a general convergence criterion, i.e. a sufficient condition for convergence even if conformity is not achieved.

NOTATION

All the symbols will be defined where they are introduced.

The following general convention are adopted:

1. Matrices (or vectors) will be denoted by bold face symbols: $\mathbf{q}$, $\mathbf{H}$.

2. The dummy index convention will be used: $A_{ij}x_i = A_{1j}x_2 + A_{2j}x_2 + \ldots$

3. A derivative will be denoted by a comma followed by indices indicating the variables with

respect to which the function is differentiated. The order is indicated by a superscript in parentheses:

$$u^{(r)}_{i,jk\ldots l} = \frac{\partial_r u_i}{\partial x_j \, \partial x_k \ldots \partial x_l}$$

4. A sequence will be denoted by its general term between braces: $\{U_n\}$.

1. INTRODUCTION

The finite element method is nowadays the most general and one of the most powerful tools for the analysis of structures.

Although it was developed for structural analysis it is really a general mathematical technique, and the main concern of this paper is to present it in this light. Mikhlin's book [1] was used as a basis for such purpose.

The important problem of the convergence to the exact solution of a sequence of approximate solutions generated by elements with decreasing size will be given special attention. Experience seems indeed to indicate that the best control of the approximation error consists in examining the behaviour of a sequence of that kind. It has also been observed that no reasonable approximate solutions are likely to be generated if the type of finite element used is such that convergence to the exact solution is not obtainable.

Before convergence to the exact solution was given the attention it deserves, there was a tendency to make monotonic convergence play the fundamental role. Monotonic convergence is nowadays no more considered so important. It has indeed been demonstrated [2] that conformity (a condition for monotonic convergence) does not always speed up the convergence to the exact solution, i.e. less approximate solutions have been obtained for some problems when the monotonic convergence requirements were verefied than when they were not.

The capacity for convergence to the exact solution of some kinds of elements has been already examined in th case where continuity is preserved [3]. The author himself presented a first proof [4] of the known criteria [2,5] which is also valid for cases where continuity is violated.

If continuity is not violated, the finite element method becomes a particularization of the classical Ritz method. This connection with the Ritz method has been observed very often but very seldom studied in detail and explored.

It is very important to notice however that, if continuity is violated, the finite element method is not a simple application of the Ritz method. A section of this paper will be devoted to demonstrating that convergence to the exact solution is still possible even in those cases.

2. STATEMENT OF THE PROBLEM

Let A be a linear bounded operator defined for a dense linear subset M of a real Hilbert space H. Assume the operator A to be symmetric and positive definite [1].

Let (u, v) denote the scalar product of two elements of H. Let $\| u \|$ denote the norm of an element in H.

This paper is concerned with the solution of the equation

$$Au = f \tag{1}$$

that is, in the determination of the element u which the operator A transforms into f; u and f are elements of H.

Equality (1) is meaningful if element u belongs to M. It is possible however that no element of M can correspond to an arbitrary element f of H; this is what is meant by stating that equation (1) can have no solution in M.

It can be shown [1] that, if equation (1) has a solution, this will be unique. It can also be demonstrated that the solution of equation (1) minimizes the funcional

$$F(u) = (Au, u) - 2\,(u, f) \tag{2}$$

and conversely, that the element which minimizes F in M satisfies equation (1).

If A is positive-bounded-below, and not merely positive definite, that is, if

$$(Au, u) \geqslant \gamma^2 \,(u, u) \tag{3}$$

γ being a real constant, then the field of definition of A can be extended so that equation (1) has a solution for an arbitrary element f of H.

The extended field of definition belongs to a new Hilbert space, H_A, which is a dense subset of H, defined as the completion of the Hilbert

space which results from associating with the elements of M the scalar product

$$[u,v] = (Au,v). \tag{4}$$

This scalar product, which will be denoted by square brackets, is called the *energy product*. The norm in H_A is termed the *energy norm* and will be denoted by bold vertical rules:

$$|u| = \sqrt{[u,u]}. \tag{5}$$

The energy norm of the difference of two elements is the *distance* between both:

$$d\,(u,v) = |\,u - v\,|. \tag{6}$$

The square of the energy norm is termed *energy* [1].

If u_0 is the solution to equation (1), then

$$Au_0 = f. \tag{7}$$

Functional (2) can thus be expressed as

$$F\,(u) = [u,u] - 2\,[u,u_0]. \tag{8}$$

It can further be transformed into

$$F\,(u) = [(u-u_0),(u-u_0)] - [u_0,u_0] = \\ = |u-u_0|^2 - |u_0|^2. \tag{9}$$

Expression (9) makes it clear that the minimum value of F in H_A is obtained for $u = u_0$.

A sequence of elements $\{u_{an}\}$, belonging to the field of definition of a functional F, is termed minimizing [1] for F if

$$\lim_{n \to \infty} F\,(u_{an}) = F_0 \tag{10}$$

F_0 being the exact lower bound of F.

As

$$F_0 = F\,(u_0) = -\,|u_0|^2 \tag{11}$$

equation (10) implies

$$\lim_{n \to \infty} |u_{an} - u_0| = 0. \tag{12}$$

Equation (12) means that any sequence which is minimizing for F converges in energy to the exact solution. Energy convergence is characterized by the fact that the distance between each term of the sequence and its limit tends to zero [1].

3. PARTICULARIZATION TO VECTOR FIELDS

Let Ω be open, connected and bounded domain with a finite number of dimensions. Let S be its boundary, which is supposed to be composed by a finite number of closed, smooth or piecewise smooth stretches.

Let $\overline{\Omega}$ be the closed domain resulting from the combination of Ω and S.

Take for space H the space of the real vector fields (with a fixed number of components) whose moduli are quadratically summable over $\overline{\Omega}$. The scalar product of a pair of elements, u and v, will be given by the Lebesgue integral:

$$(u,v) = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{v}\, d\Omega + \int_{S} \mathbf{u}^T \mathbf{v}\, dS = \int_{\overline{\Omega}} \mathbf{u}^T \mathbf{v}\, d\overline{\Omega} \tag{13}$$

$\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ being column vectores containing the components of u and v.

The number of components of the vectors is independent of the number of dimensions of the domain.

Equation (1) can be written in a more explicit form:

$$\mathbf{Au} = \mathbf{f} \tag{14}$$

$\mathbf{A}$ being a matrix of operators. These operators are from now on assumed to be differencial.

The fields beloging to M are not supposed to satisfy all the boundary conditions of the problem. Those which are necessarily satisfied by every field in M and by each field in H_A, are termed *principal boundary conditions*. The remaining ones are called *natural boundary conditions*.

Any field belonging to M is supposed to meet homogeneous principal boundary conditions. Besides, both the field and the derivatives involved in A must be continuous. These derivatives will not however generally be continuous for every field in H_A.

The energy product between elements belonging to M can be computed by the use of equations (13) and (4):

$$[u,v] = \int_{\overline{\Omega}} (\mathbf{Au})^T \mathbf{v}\, d\overline{\Omega} \tag{15}$$

An energy product involving elements in H_A not belonging to M can be computed as the

limit of the energy product of a sequence of pairs of elements belonging to M.

It is assumed that the expression (15) for the energy product can be transformed, by suitable partial integration, into

$$[u,v] = \int_{\Omega} (\mathbf{Ru})^T \mathbf{L} (\mathbf{Rv}) \, d\Omega. \tag{16}$$

L is a square, symmetric and definite positive matrix, **R** a diferential operator.

The energy of any element u in H_A is given by

$$[u,u] = \int_{\Omega} (\mathbf{Ru})^T \mathbf{L} (\mathbf{Ru}) \, d\Omega. \tag{17}$$

The expression under the integral sign receives the name of *energy density*.

Assume that **Ru** involves derivatives of component u_i with order not greater than p_i. The derivatives of order $(p_i - 1)$ or less are termed *principal derivatives*.

As the energy $[u,u]$ of any field u belonging to H_A must be finit, (**Ru**) has to be bounded almost everywhere in Ω for every field in H_A. The field components and their principal derivatives must thus be continuous almost everywhere in Ω.

In what follows, f will be supposed such that the exact solution falls into the subset $C_0 \subset H_A$ of the fields whose components are continuous everywhere in $\bar{\Omega}$, together with their principal derivatives. These continuity properties will be referred to in the text as *principal continuity conditions*.

4. APPLICATION TO LINEAR THEORY OF ELASTICITY

Elastic theories involve three kinds of magnitudes: *stresses, strains* and *displacements*, whose vectors will be denoted by σ, ε and **u**.

These magnitudes are related by three kinds of field equations which can be symbolized as follows:

(a) *Equilibrium equations*:

$$\mathbf{E}\sigma = \mathbf{X}. \tag{18}$$

(b) *Strain-displacement relations*:

$$\mathbf{Du} = \varepsilon. \tag{19}$$

(c) *Stress-strain relations*:

$$\sigma = \mathbf{H}\varepsilon. \tag{20}$$

E and **D** are differential operators, **X** is the vector of the body force density components, **H** is a symmetric positive definitive matrix.

Equations (18), (19) and (20) are valid on Ω. On the boundary S, the equilibrium equations become:

$$\mathbf{N}\sigma = \mathbf{p}. \tag{21}$$

N is a matrix whose elements depend on the orientation of the normal vector at a given boundary point. **p** is the vector of the tractions applied to the boundary.

The analysis of the equilibrium of elastic bodies reduces to finding the solution of the system of field equations (18), (19) and (20) which satisfies certain boundary conditions. The simplest and most important types of boundary conditions can be expressed directly in terms of displacements or tractions applied to the boundary. Let S_1 and S_2 denote the portions of the boundary where tractions or displacements are respectively prescribed.

Operators **E** and **D** and matrix **N** are such that the following relation holds if **u** is continuous:

$$\int_{\Omega} \sigma^T (\mathbf{Du}) \, d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{E}\sigma)^T \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{S} (\mathbf{N}\sigma)^T \mathbf{u} \, dS. \tag{22}$$

In this relation, vectors σ and **u** are not necessarily related by the stress-strain relations (20).

Combining equations (18), (19) and (20), we obtain:

$$\mathbf{EHDu} = \mathbf{X}. \tag{23}$$

Combination of equations (19), (20) and (21) yields:

$$\mathbf{NHDu} = \mathbf{p}. \tag{24}$$

Comparing equations (23) and (24) with equation (14), there results:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{EHD} \\ \mathbf{f} = \mathbf{X} \end{array}\right\} \text{for points in } \Omega \tag{25}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{A} = \mathbf{NHD} \\ \mathbf{f} = \mathbf{p} \end{array}\right\} \text{for points on } S. \tag{26}$$

It can easily be shown that operator A defined by equations (25) and (26) has the properties which were indicated in Section 2, if the displacement boundary conditions are enough to eliminate rigid body motion.

Using equation (15) we obtain:

$$[u,v] = \int_{\Omega} (\mathbf{EHDu})^T \mathbf{v}\, d\Omega + \int_S (\mathbf{NHDu})^T \mathbf{v}\, dS. \tag{27}$$

Equation (22) allows the transformation of (27) into:

$$[u,v] = \int_{\Omega} (\mathbf{Du})^T \mathbf{H}(\mathbf{Dv})\, d\Omega. \tag{28}$$

Operator $\mathbf{R}$ coincides thus with $\mathbf{D}$ and matrix $\mathbf{L}$ with $\mathbf{H}$.*

Functional F becomes:

$$F = \int_{\Omega} \varepsilon^T \mathbf{H}\, \varepsilon\, d\Omega - 2\int_{\Omega} \mathbf{H}^T \mathbf{u}\, d\Omega - 2\int_S \mathbf{p}^T \mathbf{u}\, dS \tag{29}$$

i.e. twice the total potential energy, if the displacement boundary conditions are supposed to be homogeneous,

The theorem of the minimum total potential energy, which states that the exact solution is the one, from all the compatible elastic fields, which makes the total potential energy a minimum, is thus a particularization of the theorem which affirms that the solution of equation (1) makes F a minimum in the space of the fields with finite energy.

The formulation which has been presented is quite general as it is valid not only for linear two and three-dimensional elasticity but also for linear theories of plates, shells and beams.

In the case of a plate, for instance, vector $\mathbf{u}$ contains the transverse displacement and two rotations, vector ε contains the curvatures and the transverse shear strains, vector σ contains the bending and twisting moments and the transverse shearing forces.

Operator $\mathbf{D}$ involves derivatives of the first order. The principal derivatives are thus of order zero. This means that the elements of C_0 are elastic fields with displacement components continuous everywhere in $\bar{\Omega}$.

The principal boudary conditions, which are supposed to be homogeneous, are those involving linear combinations of the displacement components. The natural boundary conditions are expressed in terms of stresses.

A very frequent simplification in the analysis of plates, shells and beams consists in neglecting the transverse shear deformation.

This makes it possible to reduce the number of the unknowns to one (the normal displacement) in the theory of plates, and to three (the normal displacement and the tangential displacements) in the theory of thin shells.

The simplified theories represent by themselves also a particularization of the general problem formulated in Section 2. The only field components are now the independent unknowns [1].

The rotations become in the simplified theory first derivatives of the normal displacement. The corresponding energy density involves thus first derivatives of the tangential displacements and second derivatives of the normal displacement, so that the principal derivatives are the derivatives of first order of the normal displacement and the derivatives of order zero of the tangential displacements.

The energy will be finit if the normal displacement and its first derivatives, as well as the tangential displacements, are continuous everywhere in $\bar{\Omega}$. As the first derivatives of the normal displacement are the rotations, the elements of C_0 are still the elastic fields with all the displacement components continuous everywhere in $\bar{\Omega}$.

Similar conclusions could easily be derived for beams.

The principal continuity conditions are thus the same both in the simplified theories and in the corresponding theories where the transverse shear deformation is not neglected.

---

* The equation

$$\int_{\Omega} (\mathbf{Ru})^T \mathbf{L}(\mathbf{Rv})\, d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{Au})^T \mathbf{v}\, d\Omega + \int_S (\mathbf{Au})^T \mathbf{v}\, dS$$

which results from the combination of (15) and (16), performs thus in the general theory of the role of the work equation (22).

5. EQUIVALENT PROBLEM

Consider the domain Ω subdivided into a number of subdomains, $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3, \ldots, \Omega^e, \ldots$ and let H^e be a real functional Hilbert space whose elements are fields defined on the general closed subdomain $\bar{\Omega}^e$. The scalar product between any pair of elements, u^e and v^e, belonging to H^e is defined by

$$(u^e, v^e) = \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^{e^T} \mathbf{v}^e \, d\Omega + \int_{S^e} \mathbf{u}^{e^T} \mathbf{v}^e \, dS =$$

$$= \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{u}^{e^T} \mathbf{v}^e \, d\bar{\Omega}. \qquad (30)$$

Let H_n be another Hilbert space (index n refers to a certain degree of subdivision of Ω into subdomains). Each element $u_n \in H_n$ may be regarded as a piecewise defined field. It represents, however, not truly a single field defined on $\bar{\Omega}$, but a set of fields u^e (one per subdomain), belonging to the different spaces H^e. Such fields are called subfields of u_n.

The scalar product in H_n is defined by

$$(u_n, v_n)_n = \sum_e (u^e, v^e)^e \qquad (31)$$

where u^e and v^e are the subfields of u_n and v_n, and $\sum_e$ denotes a summation over the whole set of subdomains.

Let M^e be a dense linear subset of H^e. Every field in M^e is assumed to coincide, on the closed subdomain $\bar{\Omega}^e$, with an arbitrary field of M.

Let M^e be the field of definition of a linear, bounded and symmetric differential operator, defined to be such that, within Ω^e,

$$\mathbf{A}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{A}\mathbf{u}^e \qquad (32)$$

and, on S^e,

$$\int_{S^e} (\mathbf{A}^e \mathbf{u}^e)^T \mathbf{v}^e \, d\Omega = \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}\mathbf{u}^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\mathbf{v}^e) \, d\Omega -$$

$$- \int_{\Omega^e} (\mathbf{A}^e \mathbf{u}^e)^T \mathbf{v}^e \, d\Omega \qquad (33)$$

u^e ond v^e being arbitrary fields belonging to M^e.

Make

$$[u^e, v^e]^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}\mathbf{u}^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\mathbf{v}^e) \, d\Omega =$$

$$= \int_{\bar{\Omega}^e} (\mathbf{A}^e \mathbf{u}^e)^T \mathbf{v}^e \, d\bar{\Omega} = (A^e u^e, v^e)^e. \qquad (34)$$

Call M_n the dense linear subset of H_n whose elements have subfields belonging to the sets M^e, and consider a linear subset of M_n such that, given any pair of its elements, u_n and v_n, with subfields u^e and v^e, the magnitude

$$[u_n, v_n]_n = \sum_e [u^e, v^e]^e \qquad (35)$$

can be properly chosen as their scalar product. Let H_{A^e} be the completion of the Hilbert space obtained by associating the scalar product (35) (termed energy product) to such subset.

The distance between any two elements in H_{A^e} will be given by

$$d_n(u_n, v_n) = \sqrt{[(u_n - v_n), (u_n - v_n)]_n} = |u_n - v_n|_n. \qquad (36)$$

Consider now the linear subspace of H_n, H'_n, whose elements are such that their subfields u'^e, corresponding to adjacent subdomains, take equal values at points lying on the common interface.

Let H_n and H'_n be the field of definition and the range of an operator B_n such that, if

$$B_n u_n = u'_n \qquad (37)$$

the sum of the values taken on the interface of two adjacent subdomains by the corresponding subfields of u_n is equal to the sum of the same values respecting u'_n. The effect of the operator B_n is thus to distribute that sum equally between the subdomains in contact.

Let v'_n belong to H'_n and let v'^e denote its subfields. We can write

$$(u_n, v'_n)_n = \sum_e (u^e, v'^e)^e = \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{u}^{e^T} \mathbf{v}'^e \, d\bar{\Omega} =$$

$$= \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{u}'^{e^T} \mathbf{v}'^e \, d\bar{\Omega} = \sum_e (u'^e, v'^e)^e =$$

$$= (u'_n, v'_n)_n = (B_n u_n, v'_n)_n. \qquad (38)$$

Let M_n be the field of definition of a new operator. A_n, such that

$$A_n u_n = B_n f_n \tag{39}$$

in which f_n is an element of H_n with subfields $f^e = A^e u^e$.

By virtue of equations (38) and (39), we have

$$(A_n u_n, v_n')_n = (B_n f_n, v_n')_n = (f_n, v_n')_n =$$
$$= \sum_e (A^e u^e, v'^e)^e = \sum_e [u^e, v'^e]^e = [u_n, v_n']_n. \tag{40}$$

Consider now the subset of H_n whose elements fulfill the condition that all the corresponding subfields coincide, within their respective subdomains, with a given field u belonging to H_A (the same for all the subdomains). It is clear that such subset is contained in H_n'. Call H_{A_n} the Hilbert space obtained by associating the scalar product $[u_n, v_n]_n$ to such subset As

$$[u_n, v_n]_n = \sum_e [u^e, v^e]^e = \sum_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}u^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}v^e)\, d\Omega \tag{41}$$
$$= \int_\Omega (\mathbf{R}\mathbf{u})^T \mathbf{L}(\mathbf{R}\mathbf{v})\, d\Omega = [u, v]$$

$[u_n, v_n]_n$ is a proper scalar product. No contradiction is thus introduced if H_{A_n} is assumed to be contained in H_{A^e}.

Call C_{0n} the subset of H_{A_n} corresponding to the subset C_0 of H_A.

Consider the equation

$$A_n u_n = f_n' \tag{42}$$

The solution of equation (42) in M_n is generally not unique and the operator A_n not positive definite. If, however, the field of definition of A_n is restricted to H_{A_n}, then the operator A_n becomes positive definite. Indeed, as H_{A_n} is contained in H_n', (40) permits to write

$$(A_n u_n, u_n)_n = [u_n u_n]_n > 0. \tag{43}$$

Consider the functional

$$F_n(u_n) = [u_n, u_n]_n - 2(u_n, f_n')_n. \tag{44}$$

Let u_{0n} denote the solution of (42) in H_{A_n} Then

$$A_n u_{0n} = f_n'. \tag{45}$$

If u_n belongs to H_n' then

$$(u_n, f_n')_n = (u_n, A_n u_{0n})_n = [u_n, u_{0n}]_n. \tag{46}$$

Introducing (46) in (44), there results

$$F_n(u_n) = [u_n, u_n]_n - 2[u_n, u_{0n}]_n = [(u_n - u_{0n}),$$
$$(u_n - u_{0n})] - [u_{0n}, u_{0n}]. \tag{47}$$

Expression (47) makes it clear that u_{0n} minimizes F_n and that any element which minimizes F_n in H_{A_n} must coincide with u_{0n}. The solution of (42) in H_{A_n} is thus unique.

Assume now that f_n' vanishes on the subdomain interfaces, and let f be any field in H which takes the same values, within the subdomains Ω^e, as the subfields of f_n'. Let u_n be the element in H_{A_n} which corresponds to the element u of H_A. Then

$$(u_n, f_n')_n = \sum_e (u^e, f'^e)^e = \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{f}^e\, d\bar{\Omega} =$$
$$= \sum_e \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, d\Omega + \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{f}\, dS = (u, f). \tag{48}$$

By virtue of (41) and (48),

$$F_n(u_n) = [u, u] - 2(u, f) = F(u). \tag{49}$$

Let u_0' be the of H_A which corresponds to u_{0n}. By virtue of (9),

$$F(u_0') = [u_0' - u_0), (u_0' - u_0)] - [u_0, u_0]. \tag{50}$$

As $F_n(u_n) \equiv F(u)$ and u_{0n} minimizes $F_n(u_n)$ in H_{A_n}, u_0' minimizes $F(u)$ in H_A. But equation (50) shows that F can only be minimized by u_0' if u_0' coincides with u_0. Thus the solution of equation (42) in H_{A_n} coincides, within each subdomain, with the solution of equation (1) in H_A.

This means that the problem of the solution of equation (42) is equivalent to the problem of the solution of equation (1).

The concepts introduced along this Section represent a generalization of the concepts introduced in the preceding ones. It is convenient to interpret such generalization in terms of three-dimensional Elasticity.

Operator A^e has the same meaning for subdomain Ω^e as operator A for the global domain, Ω. While A is defined by expressions (25) and (26), respectively for points located within Ω and on S, operator A^e is defined by the same expressions for points located within Ω^e and on S^e.

f'_n represents an external force distribution acting on each subdomain of the body. Assuming that f'_n belongs to H'_n is equivalent to assume that the total force acting on the interface between two adjacent subdomains is equally distributed between both.

The value taken by f'_n on the subdomain boundaries are thus half the surface density values of the forces acting on those interfaces. These values must vanish, if the body force volume density is to be bounded everywhere in Ω.

To solve equation (42) means to determine an elastic field which verifies equation (23) within each subdomain and equation (24) on S_1 and whose stresses present, on the subdomain interfaces, the discontinuities required to equilibrate the external forces applied on such interfaces. Any solution of equation (42) equilibrates thus the external force distribution symbolized by f'_n.

The solution of equation (42) becomes also compatible if it belongs to H_{A_n}, because the displacement boundary conditions are then respected on S_2 and the continuity of the displacements is preserved across the subdomain boundaries. The corresponding subfields coincide thus, within each subdomain, with the solution of equation (1).

6. THE FINITE ELEMENT METHOD

The finite element method is a general technique of numerical analysis which provides an approximate solution for equation (1).

In this method, domain Ω is considered to be decomposed into a finite number of subdomains and families of fields are considered which have different analytical expressions inside each subdomain.

A finite element is a closed subdomain, $\overline{\Omega}^e$, together with the family of fields which are allowed to occur within it. This family is a linear combination with coefficients q^e_i of a finite number of unit modes, so that each field of the family corresponds to ascribing particular values to the parameters q^e_i.

The values of the field components and its principal derivatives, at a certain number of points on the boundary of the elements, called *nodes* or *nodal points*, are as a rule chosen as parameters.

The type of an element refers to its general shape, nodal point specification and to the allowed fields, analytically defined by expressing a general field u^e in terms of the parameters and the coordinates with respect to a given frame: and the coordinates with respect to a given frame:

$$\mathbf{u}^e = \Phi^e (x_1, x_2, \ . \ . \ . \ ) \, \mathbf{q}^e \tag{51}$$

$\mathbf{q}^e$ is the vector of the parameters. *

Elements Φ^e_{ij} of matrix Φ^e are supposed to be continuous and have continuous derivatives of order $(p_i - 1)$, or less, in the closed domain $\overline{\Omega}^e$ occupied by the finite element e. The unit modes are definede by the columns of Φ^e

We suppose that each field component depends only on its own values at the nodes and on the values taken by its principal derivatives also at the nodes. Thus, if q^e_j corresponds to the field component u^e_i or one of its derivatives at any node of the element, all the magnitudes φ^e_{kj} for which $k \neq i$ will be equal to zero.

It q^e_j corresponds to a derivative of order s of u^e_i, φ^e_{ij} wil take te form

$$\varphi^e_{ij} (x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , l^e) = (l^e)^s \psi^e_{ij} \left(\frac{x_1}{l^e}, \frac{x_2}{l^e}, \ . \ . \ . \right) \tag{52}$$

* The allowed fields need not be introduced by giving the expression of the field components directly in terms of their own nodal values and the nodal values of their principal derivatives. They can indeed be given in terms of equal number of arbitrary parameters which in turn can be expressed in terms of those nodal values (see [9]).

MAGUE

Semi-pórtico rolante de 100 t - 5 t/10 m para movimentação de transformadores em serviço na Central Hidroeléctrica de Rapel, ENDESA, Chile

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS — *Projecto e fabrico*

TURBINAS HIDRÁULICAS — *Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*

TURBINAS A VAPOR — *Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*

CALDEIRAS A VAPOR — *Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*

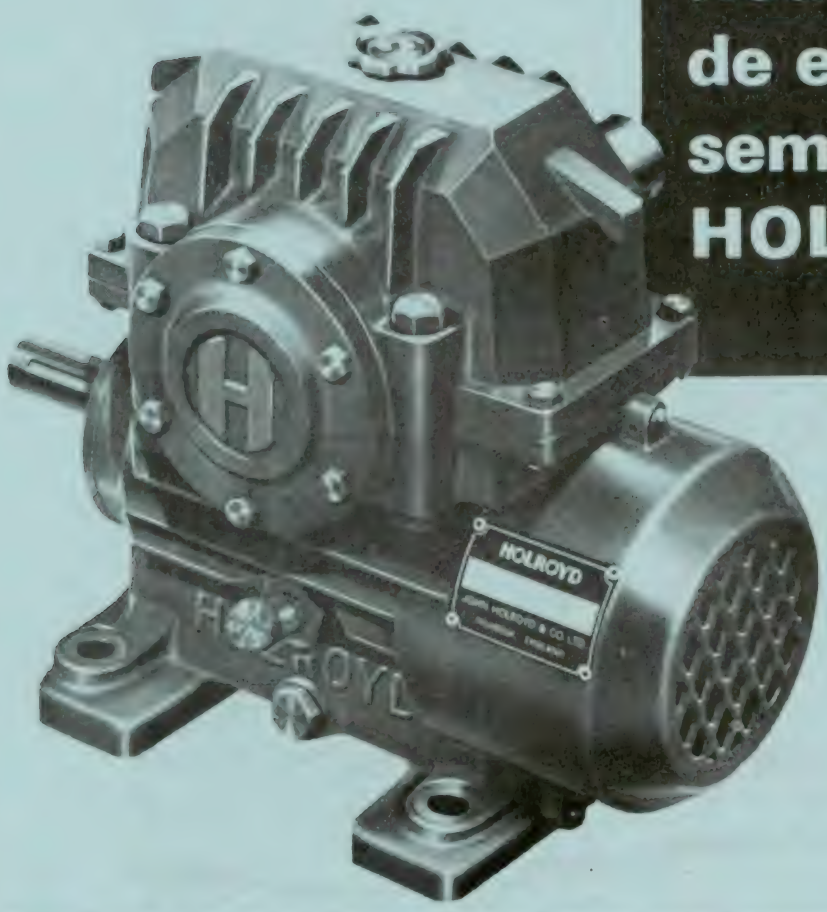
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

RENOLD LIMITED

Redutores de engrenagem sem fim HOLROYD



Redutores de engrenagen sem fim, em linhas padronizadas, para montagem normal, inversa, vertical e universal. Para potências até 389 HP, de 1 1/4" até 28" entre centros. Reduções de 5/1 até 5000/1.

RENOLD

HOLROYD

Crofts

CARTER

Outros produtos para a transmissão de força e manejo mecânico, incluindo:

CORRENTES DE ROLOS DE PRECISÃO E RODAS ENGRENAGENS E REDUTORES, DE REDUÇÃO FIXA E VARIAVEL, LUVAS DE ACOPLAMENTO, EMBRAIAGENS E FREIOS.

Informações técnicas sobre a linha completa de produtos RENOLD e HOLROYD na:

HARKER SUMNER & CIA., LDA.

38 Rua de Ceuta, 48
PORTO
Apartado No. 162. Tel: 27054 (4 linhas)

14 Largo do Corpo Santo, 18
LISBOA-2
Tel: 324823, 35124, 369028

RENOLD

RENOLD LIMITED · MANCHESTER · ENGLAND

in which l^e is a typical dimension of the element, for instance its maximum diameter, and ψ^e_{ij} is a function which does not depend on the absolute dimensions of the element. This is necessary in order that equation (51) can be homogeneous.

The different finite elements are compatibilized through the specification of *reduced continuity conditions*. These require that the values of the field components and their principal derivatives be the same at coincident nodes of adjacent elements and equal the prescribed ones at the nodes located on S_2, the portion of S where the principal boundary conditions are specified.

A point of the domain is said to be a *node of the system* if it is a nod for one or more elements.

Let $\mathbf{q}_n$ be the vector of the field components and their principal derivatives at every node of the system but those which are located on S_2. The reduced continuity condutions can be expressed by writing for each element

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{T}^e \mathbf{q}_n \tag{53}$$

where matrix $\mathbf{T}^e$ depends on the topology of the system.

Equations (53) show that the knowledge of $\mathbf{q}_n$ is enough for the definition of the field within every element of the system.

The reduced continuity conditions are generally not sufficient to make the field components and their principal derivatives continuous across the element boundaries. This depends on the type of the element.

If the type is such that the reduced continuity conditions are sufficient to ensure continuity of the components and their principal derivatives across the element boundaries, the piecewise defined fields generated by the system of finit elements are said to be *conforming*. Every conforming field thus belongs to C_{0n}, i.e. to the subset of H_{A_n} corresponding to C_0.

It the continuity requirements are violated across the element boundaries, the fields are said to be *non-conforming*.

Let U_n be the subset of H_n containing the elements whose subfields are defined by equation (51) and compatibilized through the reduced continuity conditions. Any element $u_n \in U_n$ can be expressed, withiin Ω^e, by

$$\mathbf{u}^e = \Phi^e \mathbf{q}_n \tag{54}$$

where

$$\Phi^e = \underset{\cdot}{\varphi}^e \mathbf{T}^e. \tag{55}$$

Take for space H_{A^e} (see Section 5) the space spanned by U_n and H_{A_n}. The distance between any pair of elements belonging to H_{A^e} is defined by expression (36). The discussion of completeness and convergence will be based on that concept of distance. The distance between any element u_n in U_n and any element u in H_A will indeed be measured by the distance between u_n and the element in H_{A_n} corresponding to u.

The approximate solution, u_{an}, which the finite element method provides for equation (42), and thus for equation (1), is determined by making the functional F_n stationary in U_n. Such solution could be the exact one if u_{0n} was contained in U_n. As, generally, it is not, the solution yielded by the finite element method is only approximate.

Introducing (51) and (35) in (44), we obtain:

$$F_n = \sum_e [\mathbf{q}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - 2\mathbf{q}^{eT} \mathbf{Q}^e] \tag{56}$$

where

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}\underset{\cdot}{\varphi}^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\underset{\cdot}{\varphi}^e) \, d\Omega \tag{57}$$

$$\mathbf{Q}^e = \int_{\overline{\Omega}^e} \underset{\cdot}{\varphi}^{eT} \mathbf{f}^e \, d\overline{\Omega}. \tag{58}$$

Introducing now (53) in (56), we obtain

$$F_n = \mathbf{q}_n^T \left(\sum_e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \right) \mathbf{q}_n - 2\mathbf{q}_n^T \left(\sum_e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{Q}^e \right). \tag{59}$$

Making

$$\mathbf{K}_n = \sum_e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{T}^e \tag{60}$$

$$\mathbf{Q}_n = \sum_e \mathbf{T}^{eT} \mathbf{Q}^e \tag{61}$$

there results

$$F_n = \mathbf{q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n - 2\mathbf{q}_n^T \mathbf{Q}_n. \tag{62}$$

The stationary conditions for F_n are obtained by equating to zero the derivatives of F_n with respect to the mutually independent parameters $\mathbf{q}_{ni}$. It results in the system of linear equations

$$\mathbf{K}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{Q}_n. \tag{63}$$

Introducing (57) in (60) and using (55), we obtain

$$\mathbf{K}_n = \sum_e \int_{\Omega^e} (\mathbf{R}\,\Phi^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\,\Phi^e)\, d\Omega \qquad (64)$$

$$\mathbf{Q}_n = \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \Phi^{eT} \mathbf{f}'^e\, d\bar{\Omega}. \qquad (65)$$

Matrix $\mathbf{K}_n$ is non-singular whenever the columns of Φ^e are linearly independent. As $\mathbf{L}$ is definite positive, $\mathbf{K}_n$ is also definite positive.

If $\mathbf{K}_n$ is non-singular, the parameters q_{ni} can be uniquely determined by solving the system of equations (63). Let $\mathbf{q}_{on}$ be the vector of the parameters which verify equation (63). Functional F_n can be expressed as

$$F_n = \mathbf{q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n - 2\mathbf{q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_{on} = (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{on})^T \mathbf{K}_n (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{on}) - \mathbf{q}_{on}^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_{on} \qquad (66)$$

As $\mathbf{K}_n$ is definite positive, the first term in the right-hand side of (66) is positive unless $\mathbf{q}_n$ equals $\mathbf{q}_{on}$. This proves that the solution of (63) minimizes F_n in U_n.

Let now u_{1n} and u_{2n} be two elements belonging to U_n. Let $\mathbf{q}_{1n}$ and $\mathbf{q}_{2n}$, be the vectors of the corresponding parameters. The energy product of u_{1n} and u_{2n} can be given by

$$\begin{aligned}
[u_{1n}, u_{2n}]_n &= \sum_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{R}\mathbf{u}_1^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\mathbf{u}_2^e)\, d\Omega = \\
&= \mathbf{q}_{1n}^T \sum_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{R}\Phi^e)^T \mathbf{L} (\mathbf{R}\Phi^e)\, d\Omega\, \mathbf{q}_{2n} \\
&= \mathbf{q}_{1n}^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_{2n} = \mathbf{q}_{1n}^T \mathbf{Q}_{2n} = \mathbf{q}_{1n}^T \sum_e \int_{\Omega_e} \Phi^{eT} \mathbf{f}_2'^e\, d\bar{\Omega} \\
&= \sum_e \int_{\bar{\Omega}_e} (\Phi^e \mathbf{q}_{1n})^T \mathbf{f}_2'^e\, d\bar{\Omega} = \sum_e \int_{\bar{\Omega}^e} \mathbf{u}_1^{eT} \mathbf{f}_2'^e\, d\Omega \\
&= \sum_e (u_1^e, f_2'^e f_2'^e)^e = (u_{1n}, f_{2n}')_n = (u_{2n}, f_{1n}')_n
\end{aligned} \qquad (67)$$

where f_{1n}' and f_{2n}' are the right hand sides (of equation (42)) which u_{1n} and u_{2n} correspond to (as approximate solutions).

It results from (67) that the functional F_n may take in U_n the following expression

$$\begin{aligned}
F_n(u_n) &= [u_n, u_n]_n - 2(u_n, f_n')_n = [u_n, u_n]_n - 2[u_n, u_{an}]_n \\
&= [(u_n - u_{an}), (u_n - u_{an})]_n - [u_{an}, u_{an}]_n
\end{aligned} \qquad (68)$$

which makes it clear that u_{an} minimizes F_n in U_n. Such expression will be used in Section 10.

7. THE RITZ METHOD

The method just described is justified if it can generate a sequence of fields converging to u_o (the solution of equation (1)), when sucessive subdivisions are considered with elements of invariant type but decreasing size.

Conditions to be met by matrix Φ^e in order that this convergence may be ensured can be established if it is remarked that the finite element method is related to the well-known Ritz method [1, 6].

The Ritz method is a technique for generating a minimizing sequence for a given functional, say F. This technique. which can be used whenever H is a separable space, is based [6] on the determination of a sequence of families, $\{V_n\}$, satisfying the following conditions:

(a) the sequence is complete in energy with respect to a class $C \subset H_A$ containing u_o (*completeness requirement*);

(b) the nth family depends on a finite number, N, of arbitrary parameters;

(c) every element which can be obtained by ascribing arbitrary values to the parameters belongs to C_o (*conformity requirement*).

In what concerns condition (a), it is remembered that a sequence of families of elements is said to be *complete in energy* with respect to a given class $C \subset H_A$ if it is possible, for a specified $\varepsilon > 0$, to find an integer N such that, in each family with order $n > N$, there exists an element u_{cn} which satisfies the inequality

$$d(u, u_{cn}) < \varepsilon \qquad (69)$$

where u is any element of C.

The terms of the minimizing sequence $\{V_{an}\}$ are obtained by minimizing F in each family V_n.

The elements of the nth family are generally given as a linear combination with coefficients q_{ni} of N linearly independent fixed elements Ψ_{ni} which are termed coordinate elements:

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{N} \Psi_{ni}\, q_{ni} = \Psi_n \mathbf{q}_n \qquad (70)$$

$\mathbf{q}_n$ being the vector of the coefficients q_{ni} and Ψ_n the matrix with columns Ψ_{ni}

Family V_n becomes thus a linear N-dimensional space. Introducing (70) in (2), we obtain:

$$F(u_n) = \mathbf{q}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{q}_n - 2\mathbf{Q}_n^T \mathbf{q}_n \tag{71}$$

in which

$$\mathbf{K}_n = \int_\Omega (\mathbf{R}\Psi_n)^T \mathbf{L}(\mathbf{R}\Psi_n)\, d\Omega \tag{72}$$

and vector $\mathbf{Q}_n$ is defined by

$$\mathbf{Q}_n = \int_{\bar{\Omega}} \Psi_n^T \mathbf{f}\, d\bar{\Omega} \tag{73}$$

The values of the parameters which make F stationary can be determined by solving the system of linear equations

$$\mathbf{K}_n \mathbf{q}_n = \mathbf{Q}_n \tag{74}$$

$\mathbf{K}_n$ is a non-singular matrix if the coordinate elements are linearly independent [1]. The system has thus a unique solution which provides the unique stationary point of F in V_n.

The finite element method can be considered as a technique for the application of the Ritz method only if the piecewise defined fields are conforming (conformity requirement). Only thus can indeed condition (c) be respected. The sets V_n are then the subsets of H_A corresponding to the subsets $U_n \subset H_{A_n}$.

In order that convergence to the exact solution may be obtained, it is thus only necessary to meet condition (a), that is completeness. It will be seen later on how this can be obtained.

Comparing (70) with (54) it can be concluded that the coordinate fields used in the finite element method are defined by

$$\Psi_n = \Phi^e \mathbf{T}^e = \Phi^e \text{ within element } e. \tag{75}$$

The analytical expression of the coordinate fields varies thus from element to element and this piecewise definition is the main characteristic of the finite element method.

It is also important to notice that such piecewise definition and the reduced continuity conditions allow matrix $\mathbf{K}_n$ and vector $\mathbf{Q}_n$ to be assembled from simpler matrices, $\mathbf{K}^e$ and $\mathbf{Q}^e$, connected with the finite elements themselves (see equations (60) and (61)). This is one of the most interesting features of the method.

8. MONOTONIC CONVERGENCE

Assume a sequence of families, $\{V_n\}$, fulfiling the conditions (b) and (c) stated in the preceding section and suppose that the nth family contains all the families with smaller order. As v_{an} makes F a minimum in V_n, we have:

$$F(v_{a1}) \geqq F(v_{a2}) \geqq F(v_{a3}) \geqq \ldots \geqq F(v_{an}) \geqq \ldots F(u_0). \tag{76}$$

By Bolzano's theorem [7], the sequence $\{F(v_{an})\}$ converges to a limit which cannot be smaller than $F(u_0)$. It is remarked that this conclusion is valid even if condition (a) of Section 7 is not obeyed. If it is obeyed, then we know that the limit is $F(u_0)$.

As the inequality

$$F(v_{an}) - F(v_{am}) \leqq 0 \tag{77}$$

holds, for $m < n$, equation (9) yelds

$$|v_{an} - u_0| \leqq |v_{am} - u_0|. \tag{78}$$

This means that the distance to the exact solution decreases when n increases. Convergence is said to be *monotonic*.

Monotonic convergence does not ensure convergence to the exact solution. On the other hand, convergence to the exact solution is not necessarily monotonic.

Consider now a sequence of approximate solutions generated by finite elements with decreasing size.

Conformity and the requirement that the family of fields corresponding to a given subdivision contains the families corresponding to elements with larger sizes have been proposed Melosh [8] as sufficient conditions for monotonic convergence of such sequence.

However, as the approximate solution minimizes F_n in U_n, regardless of conformity being respected, the requirement that each family of fields contains the families corresponding to ele-

ments with larger sizes stands by itself as a sufficient condition for convergence. We can indeed write the set of inequalities (76) once this conditions is fulfilled

9. COMPLETENESS CRITERION

In what concerns convergence to the exact solution, we know that the Ritz method generates a minimizing sequence and that a minimizing sequence actually converges in energy to the exact solution.

Convergence to the exact solution can thus be ensured if conformity and completeness are both achieved. We shall see however that completeness is the truly important requirement.

Before proceeding further we remark that completeness of a sequence of families with respect to a set $C \subset H_A$ has a meaning provided we can computte the distance between every field of each family and any element in C (see Section 6).

A general criterion for completeness will be stated and justified in this section. This criterion was presented in a recent book [9] by Zienkiewicz but is has not yet been justified as far as we know.

Let $(p_i - 1)$ be the maximum order of the principal derivatives for component u_i.

We wish to demonstrate that completeness will be obtained if the general analytical expression for n_i^e, within element e (ses equation (51)), is given* as a polynomial with a number of arbitrary coefficients equal to the number of unit modes corresponding to the element. Furthermore this polynomial expression must contain a complete polynomial of the p_ith degree all the terms of which are affected by independent arbitrary coefficients. The terms of higher degree can vanish whatever the values taken by those coefficients.

We remark that, if this is the case, the field component u_i^e or any of its derivatives of order p_i or less can take any arbitrary constant value throughout the element if suitable values are ascribed to the parameters. In order that the derivative $u_{i,rs...}^e$ assumes an arbitrary constant value V in Ω^e, it is then indeed only necessary that the coefficient which multiplies the monomial $(x_1^r x_2^s \ldots)$ in u_i^e be equal to $V/r(r-1)\ldots s(s-1)\ldots$, all the remaining coefficients being equal to zero.

The right hand side of equation (1) has been constrained in Section 3 to be such that solution u_0 belongs to C_0, so that the derivatives of order p_i of solution u_0 are bounded but not necessarily continuous.

In the next Sections we assume furthermore that the exact solution falls into a subset of C_0, C_1, such that the derivatives of order $(p_i + 1)$ of the field component u_i are continuous within each element. Discontinuities of the p_ith and $(p_i + 1)$ th derivatives are still allowed at points which always remain on element boundaries as the size of the elements is progressively reduced.

Let C_{1n} be the subset of H_{A_n} corresponding to the subset C_1 or H_A.

Any field u_n belonging to C_{1n} can thus be represented inside Ω^e by the following Taylor's expansion of its subfield components:

$$u_i^e = u_i^e(O) + u_{i,j}^e(O).(x_j - x_j^0) + \ldots + \\ + \frac{1}{p_i!} u_{i,j\ldots k}^{e(pi)}(O).(x_j - x_j^0)\ldots(x_k - x_k^0) + \\ + \frac{1}{(p_i+1)!} u_{i,jk\ldots l}^{e(pi+1)}(O_i).(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)\ldots \\ \ldots(x_l - x_l^0) \qquad (79)$$

O and O_i are points of Ω^e. O_i depends on the coordinates of the point where u_i^e is to be determined.

Let us consider now a polynomial field with components

$$u_i^{te} = u_i^e(O) + u_{i,j}^e(O).(x_j - x_j^0) + \ldots + \\ + \frac{1}{p_i!} u_{i,j\ldots k}^{e(pi)}(O).(x_j - x_j^0)\ldots(x_k - x_k^0) \qquad (80)$$

which we call tangent field to u at O.

As all the derivatives of order $(p_i + 1)$ are bounded inside Ω^e, (79) and (80) yield:

$$|u_i^e - u_i^{te}| < \frac{d}{(p_i+1)!} \cdot V_1 \cdot (l^e)^{pi+1} \qquad (81)$$

in which V_1 is an upper bound for all the $(p_i + 1)$ th derivatives and l^e is the maximum diameter of

(*) See footnote at page 442.

element e. d is the total number of the (p_i+1) th derivatives.

By considering similar expansions for the derivatives of u_i, it is possible to derive the following general inequality:

$$\left| u^{e(r)}_{i,j\ldots k} - u^{te(r)}_{ni\ldots k} \right| < \frac{d}{(p_i - r + 1)!} \cdot V_1 \cdot (l^e)^{p_i - r + 1} \tag{82}$$

for $r \leqq p_i$.

As operator $\mathbf{R}$ involves derivatives of u^e_i of order p_i or less, we have:

$$[\mathbf{R}(\mathbf{u}^e - \mathbf{n}^{te}_n)]^T \mathbf{L} [\mathbf{R}(\mathbf{u}^e - \mathbf{u}^{te}_n)] < V_2 (l^e)^2 \tag{83}$$

for l^e sufficiently small. V_2 is a positive number.

Thus:

$$[(u^e - u^{te}), (u^e - u^{te})]^e < V_2 (l^e)^2 \Omega^e. \tag{84}$$

If tangent fields u^{te} are considered for every subdomain Ω^e, piecewise defining a field n^t_n in Ω, we obtain, by using (35),

$$\left(\left| u_n - u^t_n \right|_n \right)^2 = [(u - u^t_n), (u - u^t_n)]_n < V_2 l^2_n \Omega \tag{85}$$

in which l_n denotes the maximum value of l^e in the whole set of elements.

This means that the distance between any field in C_1 and the tangent field u^t_n, piecewise defined by (80), tends to zero with the size of the finite elements.

Consider now a type of finite element generating a sequence of families of fields whose completeness is to be investigated.

Call u^{fe} the field within the finite element e such that the values of its components and their principal derivatives at the nodal points are respectively equal to the values of the components of the field $u_n \in C_{1n}$ and corresponding partial derivatives at the same points.

Suppose the general criterion to be satisfied. u^{te} can thus be one of the fields which can occur within the finite element. Let this field correspond to values q^{te}_i of the parameters:

$$\mathbf{u}^{te} = \Phi^e \mathbf{q}^{te}. \tag{86}$$

On the other hand

$$\mathbf{u}^{fe} = \Phi^e \mathbf{q}^{fe}. \tag{87}$$

From (86) an (87) we obtain

$$\left| u^{te}_i - u^{fe}_i \right| = \left| \varphi^e_{ij} (q^{te}_j - q^{fe}_j) \right| \tag{88}$$

or, considering (52),

$$\left| u^{te}_i - u^{fe}_i \right| = \sum_j (l^e)^s \cdot \left| \psi^e_{ij} (\mathrm{q}^{te}_j - \mathrm{q}^{fe}_j) \right| \tag{89}$$

in which s is the order of the field derivative to which parameter q_j corresponds.

But

$$\psi^e_{ij} = \psi^e_{ij} \left(\frac{x_1}{l^e}, \frac{x_2}{l^e}, \ldots \right) \tag{90}$$

and

$$\psi^{e(r)}_{ij,k\ldots l} = \frac{1}{(l^e)^r} \cdot \frac{\partial^r \psi^e_{ij}}{\partial (x_k/l^e) \ldots \partial (x_l/l^e)}. \tag{91}$$

For this reason,

$$\left| u^{te(r)}_{i,k\ldots l} - u^{fe(r)}_{i,k\ldots l} \right| = \left| \varphi^{e(r)}_{ij,k\ldots l} (q^{te}_j - q^{fe}_j) \right|$$
$$\leqq \sum_j (l^e)^{s-r} \left| \frac{\partial^r \psi^e_{ij}}{\partial (x_k/l^e) \ldots \partial (x_l/l^e)} (q^{te}_j - q^{fe}_j) \right|. \tag{92}$$

As the absolute dimensions of the element do not appear explicitly in the functions ψ^e_{ij}, these functions remain bounded as the size of the element decreases.

The same happens to the derivatives $\partial^r \psi^e_{ij} / / \partial (x_k/l^e) \ldots \partial (x_l/l^e)$, for $r \leqq p_i$, because the functions φ^e_{ij} and their derivatives of order $(p_i - 1)$ or less were in Section 5 supposed to be continuous. Assume the moduli of all these magnitudes remain below a positive number V_3.

Then

$$\left| u^{te(r)}_{i,k\ldots l} - u^{fe(r)}_{i,k\ldots l} \right| < \sum (l^e)^{s-r} V_3 \cdot \left| q^{te}_j - q^{fe}_j \right|. \tag{93}$$

On the other hand, as the components of u^{fe} and their principal derivatives take the same

values at the nodes as the corresponding magnitudes in u^e, equation (82) permits us to write:

$$\left| q_j^{te} - q_j^{fe} \right| < \frac{d}{(p_i - s + 1)!} \cdot V_1 \cdot (l^e)^{pi - s + 1}. \tag{94}$$

when parameter q_j^e corresponds to a derivative of order s.

Equations (93) and (94) hold even if the p_ith derivatives of u_i^{fe} are discontinuous in Ω^e. This is an important remark because sometimes [10] the element itself is considered subdivided into parts and the field admits different analytical expressions within each part. Our proof remains valid however even if the derivatives of order p_i are not continuous across the internal boundaries of the element.

As the parameters cannot correspond to derivatives of order larger than $(p_i - 1)$, s cannot be larger than $(p_i - 1)$ and equation (94) yields

$$\left| q^{te} - q_j^{fe} \right| < \frac{d}{2!} V_1 (l^e)^{pi - s + 1}. \tag{95}$$

Introducing equations (95) in (93) we obtain:

$$\left| u_{i,k..l}^{te(r)} - u_{i,k..l}^{fe(r)} \right| < V_3 \frac{V_1}{2!} (l^e)^{pi - s + 1} d N^e \tag{96}$$

N^e being the total number of parameters corresponding to element e.

This equation is still valid for $r = 0$, if the derivatives of order zero are interpreted as the field components themselves.

The similarity between equations (96) and (82) allows a jump straight to the inequality:

$$(\left| u_n^t - u_n^f \right|_n)^2 < V_4 l_n^2 \Omega \tag{97}$$

V_4 being a positive number and u_n^f denoting the piecewise defined field which coincides with u^{fe} within a general element e.

Equation (97) means that the distance between u_n^t and u_n^f tends to zero with l_n. Combining (97) and (85) we conclude that the distance between u_n and u_n^f tends also to zero when the size of the element decreases, so that, as u_n is an arbitrary element of C_{1n}, the completeness proof is finally achieved.

10. CONVERGENCE DISCUSSION

Consider any type of finite element which can generate a sequence $\{U_n\}$ of families of generally non-conforming fields complete in energy with respect to C_1.

We wish to investigate if the sequence of approximate solutions $\{u_{an}\}$ obtained by minimizing F_n in each family U_n converges in energy to the exact solution.

We know already that completeness implies convergence to the exact solution if it is associated with conformity. It will be concluded in this Section that completeness with respect to C_1 is a sufficient condition for convergence, regardless of conformity being obtained.

Let u_{en} be the field in U_n which presents the same nodal values of the field components and corresponding principal derivatives as u_{0n} (the solution of equation (42) in H_{An}). As completeness is ensured, it is possible to determine N such that, for $n > N$,

$$d_n(u_{on}, u_{en}) < \varepsilon \tag{98}$$

ε being a positive and arbitrarily small number.

As F_n is continuous, we can find ε such that

$$F_n(u_{en}) = F_n(u_{0n}) \pm \varepsilon' \tag{99}$$

ε' being also positive and arbitrarily small.

As u_{en} belongs to U_n, and u_{an} (the approximate solution yielded by the finite element method) minimizes F_n in U_n,

$$F_n(u_{an}) \leqq F_n(u_{en}) \tag{100}$$

and

$$F_n(u_{an}) \leqq F_n(u_{on}) \pm \varepsilon'. \tag{101}$$

Let now f'_{an} be an element of H'_n defined by

$$f_{an} = A_n u_{an}. \tag{102}$$

As u_{an} is an approximate solution to equation (42), f'_{an} generally does not coincide with f'_n.

Let u_{en} denote the solution of the equation

$$A_n u_n = f'_{an} \tag{103}$$

in H_{An}. Assume that u_{en} belongs to C_{1n}. This assumption will later be discussed.

Let u_{bn} be the field in U_n whose components and corresponding principal derivatives take the same nodal values as u_{cn}. As u_{cn} belongs to C_{1n}, and the sequence $\{U_n\}$ is complete with respect to C_1, it is possible to find N_1 such that, for $n > N_1$,

$$d_n(u_{cn}, u_{bn}) < \varepsilon'' \tag{104}$$

ε'' being a positive number, arbitrarily small.

As A_n is a continuous operator, it is also possible to determine ε'' such that (104) implies

$$\| A_n u_{cn} - A_n u_{bn} \| < \varepsilon''' \tag{105}$$

ε''' being positive and arbitrarily small.

Let

$$f'_{bn} = A_n u_{bn}. \tag{106}$$

As u_{cn} is a solution to equation (103),

$$A_n u_{cn} = f'_{an}. \tag{107}$$

The inequality (105) can thus be transformed into

$$\| f'_{an} - f'_{bn} \| < \varepsilon'''. \tag{108}$$

By virtue of (67), as u_{bn} and u_{an} both belong to U_n,

$$\begin{aligned}[d_n(u_{an}, u_{bn})]^2 &= [(u_{an} - u_{bn}), (u_{an} - u_{bn})]_n \\ &= ((u_{an} - u_{bn}), (f'_{an} - f'_{bn}))_n.\end{aligned} \tag{109}$$

As, by Cauchy's inequality,

$$\begin{aligned}&((u_{an} - u_{bn}), (f'_{an} - f'_{bn}))_n \leq \| u_{an} - u_{bn} \|_n \\ &\| f_{an} - f'_{bn} \|_n < \varepsilon''' \| u_{an} - u_{bn} \|_n\end{aligned} \tag{110}$$

we obtain

$$d_n(u_{an}, u_{bn}) < \sqrt{(\varepsilon''' \| u_{an} - u_{bn} \|_n)}. \tag{111}$$

Combining (104) with (111), there results

$$d_n(u_{an}, u_{cn}) \leq d_n(u_{an}, u_{bn}) + d_n(u_{bn}, u_{cn}) < \varepsilon^{iv} \tag{112}$$

where

$$\varepsilon^{iv} = \varepsilon'' + \sqrt{(\varepsilon''' \| u_{an} - u_{bn} \|_n)} \tag{113}$$

As F_n is a continuous functional, it is then possible, given $\varepsilon^{v} > 0$, to determine ε^{iv} such that

$$F_n(u_{cn}) = F_n(u_{an}) \pm \varepsilon^{v}. \tag{114}$$

As u_{cn} belongs to H_{A_n},

$$F_n(u_{cn}) \geq F_n(u_{0n}). \tag{115}$$

Thus

$$F_n(u_{cn}) \pm \varepsilon^{v} \leq F_n(u_{an}). \tag{116}$$

Combining (99), (100) and (116), there results

$$F_n(u_{an}) \leq F_n(u_{cn}) \leq F_n(u_{an}) \pm \varepsilon' \pm \varepsilon^{v} \tag{117}$$

and thus

$$F_n(u_{cn}) = F_n(u_{an}) + \varepsilon^{vi} \tag{118}$$

in which $\varepsilon^{vi} < \varepsilon' + \varepsilon^{v}$.

But, as u_{an} and u_{cn} both belong to U_n, (68) permits to write

$$\begin{aligned}F_n(u_{cn}) - F_n(u_{an}) &= [(u_{an} - u_{cn}), (u_{an} - u_{cn})]_n = \\ &= [d_n(u_{an}, u_{cn})]^2 = \varepsilon^{vi}.\end{aligned} \tag{119}$$

Combining (119) and (98), we obtain finally

$$d_n(u_{an}, u_{0n}) \geq d_n(u_{an}, u_{cn}) + d_n(u_{cn}, u_{0n}) < \varepsilon + \sqrt{\varepsilon^{vi}}. \tag{120}$$

Expression (120) shows that u_{an} converges to u_{0n}.

It remains to prove that u_{cn} belongs to C_{1n}. This assumption was indeed used to obtain (104).

Our reasoning will be based on a theorem which is known to be valid for Poisson's equation

$$\Delta u = f \tag{121}$$

Such theorem states that u has continuos second order derivates in domain Ω whenever f is a Hölder continuous function in Ω [12].

A corresponding theorem is lacking which refers to the general problem with which the present paper is concerned. We are thus not sure that the derivatives involved in the operator A are continuous whenever f is Hölder continuous. It seems however very reasonable to expect the theorem to be true, at least as far as linear elastic

theories are concerned. It will thus be admitted that, at least in case of Elasticity, the Hölder continuity of the body force density implies the continuity of the displacement derivatives involved in the operator.

u_{cn} denotes the solution to equation (103) in H_{A_n}. This means, in terms of Elasticity, that u_{cn} represents the compatible field which equilibrates the same external forces as u_{an}. Such forces are of two kinds: body forces distributed within each subdomain and forces distributed on the subdomain interfaces and on S. u_{cn} will belong to C_{1n}, i.e. its $(p_i + 1)$ th derivatives will be continuous within Ω^e, if the derivatives involved in the operator are continuous within Ω^e, and thus if the body force density corresponding to u_{an} is Hölder continuous within Ω^e.

The problem now consists in proving that the body force density corresponding to u_{an} is Hölder continuous within Ω^e, no matter how large is n. We shall not attempt to investigate the general conditions in which such a statement is true.

Sometimes, however, the proof is trivial. This is namely the case if the type of the element is such that the body force density vanishes or is forced to a prescribed bounded and continuous polynomial variation within each element, no matter the values of the parameters.

If such a common situation arises, there remains no doubt that the completeness criterion is also a convergence criterion, even if conformity is not achieved. But, if it is achieved, the finite element method becomes a particularization of the Ritz method, and completeness will ensure convergence in any case.

Our reasoning can be adapted to cases [10] in which the elements are subdivided into parts and the allowed fields have different analytical expressions within each part. The body force density is then generally not continuous within the element taken as a whole. Convergence will however easily be proved if each part is treated as a separate element.

11. CONCLUSIONS

The finite element method has been presented as an analytical technique which can be applied to a very broad class of problems.

Functional Analysis provides the frame for an abstract formulation in which some generalized concepts, like energy and distance, with a physical or geometrical origin, play a fundamental role. Particularly, the definition of distance between two fields, as the square root of the energy of their difference, is an extremely convenient basis for the discussion of convergence.

The description of the finite element method also required the introduction of the concept of principal derivatives. Continuity of the field components and their principal derivatives is necessary if the energy density is to be finite. In two and three-dimensional Elasticity, for instance, as the continuity of the displacement components is enough to ensure a finite energy, the principal derivatives are of order zero.

The fact that the finite element method is based on the decomposition of the global domain into subdomains, made it convenient to transform the initial problem into an equivalent one. In Elasticity, for instance, the initial problem consists in the determination of an elastic field which verifies the field equations everywhere within the domain, while the transformed problem consists in the determination of a set of fields respecting the field equations within each subdomain and verifying compatibility and equilibrium conditions on the subdomain interfaces. In both cases the conditions imposed on the external boundary must be fulfilled.

In the finite element method, the principal continuity requirements are replaced by reduced continuity conditions which may imply the fulfillment of the principal continuity conditions everywhere in the domain. If they do, the piecewise defined fields are said to be conforming but non-conforming if it happens otherwise.

This is an opportunity to remark that conformity has been with difficulty obtained for plate and shell elements [10]. Such difficulty results from the fact that rotations are usually regarded as derivatives of the transverse displacements. This has not however to be so (see Section 4), and conformity can be easily obtained if the rotations are considered as true displacements.

When conformity is achieved, the finite element method becomes a particularization of the Ritz method. Such particularization is characterized by the piecewise definition of the field, which, together with the reduced continuity

CONTROLE INDUSTRIAL

Mas com aparelhagem de Controle Industrial que dá informações precisas sobre as condições do processo em curso e corrige automàticamente os desvios às condições ideais.

O industrial português conquistará o seu lugar no Mercado Mundial se não esquecer que a luta com a concorrência começa a ser ganha durante a produção.

A realização do controle durante o processo, além de dar ao industrial garantias de boa produção, dá ao Comprador a certeza da boa qualidade dos produtos que compra.

FISHER Controls · CROUZET · TAYLOR · SAUTER · ENRAF

ELECTROTÉCNICOS REUNIDOS, LDA.
AV. DUQUE D'AVILA, 66, 3.º TELEF 41161/5

FILTROS TECIDOS

PARA GAZES E LÍQUIDOS
EM PEÇAS, PANOS, MANGAS OU SACOS

DE QUALQUER FIBRA NATURAL OU SINTÉTICA

FANAFEL

FÁBRICA NACIONAL DE FELTROS INDUSTRIAIS
SOCIEDADE LIMITADA

APART.: 9
TELEFS.: 52091 PBX
TELEG.: FELTROS

OVAR
PORTUGAL

ESCRITÓRIO E FÁBRICA
ESTRADA DE S. JOÃO

Empresa Ultramarina de Sondagens e Fundações, L.da

(SONDADORA)

SONDAGENS geológicas e geotécnicas — CAPTAÇÕES de águas subterrâneas — REBAIXAMENTOS do nível freático — CONSOLIDAÇÕES E ESTABILIZAÇÃO do solo — INJECÇÕES DE CIMENTO e outros produtos — INFRAESTRUTURAS de barragens, túneis e pontes — FUNDAÇÕES de todos os tipos

Única Empresa da especialidade com sede no Ultramar Português

DELEGAÇÃO - LISBOA
R.S.Pedro de Alcântara, 1
Tel. 32 46 93 e 21 32 56

SEDE - LUANDA
Rua Serpa Pinto, 60
C.P.2178 - Tel.4226

MOÇAMBIQUE
L.Marques - C.P.982 - Tel.74 11 21
Beira - C.P. 1002 - Tel. 71497

conditions, allows matrix $\mathbf{K}_n$ and vector $\mathbf{Q}_n$ (the stiffness matrix and the force vector in elastic problems) to be assembled from simpler matrices and vectors which refer to each finite element.

The matrix analysis which is developed in this paper for the determination of $\mathbf{K}_n$ and $\mathbf{Q}_n$ is a generalization of the displacement method of Stuctural Analysis. The force method [4] could also be used.

Completeness is a sufficient condition for convergence to the exact solution in the Ritz method, i.e. if conformity is achieved.

A general completeness criterion is justified in Section 9. It is proved that such criterion ensures completeness with respect to a set C_1 containing the fields whose derivatives of order up to $(p_i + 1)$ are continuous within the subdomains corresponding to the elements. The principal derivatives are of order $p_i - 1$, so that the criterion does not ensure completeness with respect to the set of all the fields with finite energy.

In two and three-dimensional Elasticity, the $(p_i + 1)$ th derivatives are second order derivatives. Their continuity implies the continuity of the body force distribution density. The continuity of the body force distribution density is not however a very strong restriction, as discontinuities of the first and second derivatives of the displacements are still admitted at points which remain on element boundaries when the size of the elements is progressively reduced. The solution of problems in which external forces are distributed on element interfaces is thus not excluded.

Completeness with respect to C_1 is a sufficient condition for convergence whenever conformity is achieved. However, it was shown in Section 10, that completeness implies convergence in any case, i.e., even when conformity is not achieved, if the body force density remains continuous and bounded within each element as n tends to infinity.

Along the whole paper the principal boundary conditions (which correspond to displacement boundary conditions in Elasticity) were supposed to be homogeneous. If they are not homogeneous, the finite element method can however still be applied. All that must be done is to make the values of the field components and their principal derivatives coincide with the prescribed values, at the nodes which are located on S_2. As the size of the elements tends to zero, we obtain approximate solutions tending to a solution which obeys the field equation inside the domain (in case the convergence criterion has been respected) and the prescribed boundary conditions on the boundary. This is of course the exact solution.

It remains to indicate that the formulation presented in this paper is not the only possible one.

In the present paper, the nodal values of the field components and their principal derivatives are indeed chosen as parameters in terms of which the reduced continuity conditions are to be expressed.

It is however possible, in elastic problems, to take as parameters the resultants and moments of the forces distributed on the element boundaries. The analysis starts then from reduced equilibrium conditions, which are directly expressed in terms of such parameters [11]. The interest of this second formulation is that it can generate equilibrated solutions while the first formulation leads to compatible ones (if conformity is achieved).

This second formulation may be generalized, as well as the first, to cover the general problem with which the present paper is concerned. It will be shown in a next paper how this can be done and which criterion may be used to ensure convergence to the exact solution.

REFERENCES

[1] S. G. Mikhlin, *Variational Methods of Mathematical Physics*. Pergamon Press (1963).

[2] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending. Conforming and nonconforming solutions. *Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB. Ohio, 1965.

[3] S. W. Key, A convergence investigation of the direct stiffness method. Ph.D. Dissertation. University of Washington (1966).

[4] E. R. Arantes Oliveira, *Introdução à teoria das estruturas*. Lisboa, Author's edition (Dec. 1966).

[5] B. Irons and K. Draper, Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending. *AIAA Jnl* 3, 965 (1963).

[6] L. V. Kantorovich and V. I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*. Noordhoff (1958).

[7] E. T. Whittaker and G. N. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press (1965).

[8] R. J. Melosh, Basis for the derivation of matrices for the direct stiffness method. *AIAA Jnl* 1, 1631 (1963).

[9] O. C. Zienkiewicz and Y. K. Cheung, *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill (1967).

[10] R. W. Clough and J. L. Tocher, Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending. *Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.

[11] E. R. Arantes Oliveira, Formulações básicas do método dos elementos finitos. 2.°s *Jornadas Luso-Brasileiras de Engenharia Civil, Rio de Janeiro-S. Paulo* (Agosto 1967).

[12] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II. Interscience (1962)

APPENDIX

COMMENTS ON THE PAPER: THEORETICAL FOUNDATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD†

In the summer of 1965 following some clues in the literature [1] and also some early indications in the experiments on the Zienkiewicz plate bending triangle [2], certain definite conclusions were reached concerning the convergence of non-conforming plate elements. The numerical experiments and the theory that subsequently reinforced the conclusions are described in the addendum to Ref. [2]. The experiments are now described less succinctly, as their import appears to have generally misunderstood.

If we postulate that a particular solution converges as the mesh is refined, giving smoothly varying stresses, we may presume also that the finite element representation gives sensibly constant bending stress within each element and hence sensibly constant curvature. This is why, in engineering terms, displacement functions must be "complete"[3]. However, early experiments suggested that the responsabilities were not entirely fulfilled unless conformity was also imposed. It was fortunate that four elements were simultaneously under test [2], one of which, the Zienkiewicz version, was non-conforming, the other three conforming. All four gave the states of constant curvature under suitable nodal action and all four were derived from a single shape function routine with options, by numerical integration. In two cases this was exact. The routine was checked thoroughly by various numerical tests.

The first indication of the strange behaviour of the nonconforming triangle was when mesh (a) of Fig. 1 responded correctly to distributed bending moment applied at the free end

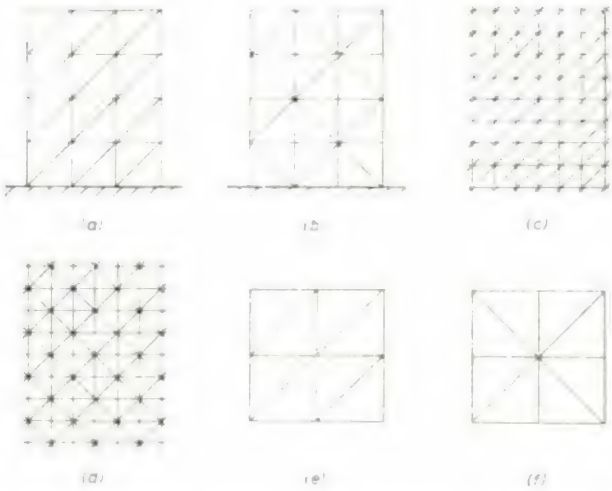


Fig. 1. The mesh pattern on which experiments demonstrated convergence or non-convergence.

whereas (b) did not. The evidence was already irrefutable, for the conforming triangles all behaved correctly in both mesh (a) and (b). This evidence suggested that a mesh of type (c), composed of three sets of parallel lines, gives convergence, whereas mesh (d), composed of "union jack" figures, would not give convergence, however fine the mesh. This suggestion may be

† E. R. de Arantes e Oliveira, *Int. J. Solids Struct.* 4, 929 (1968).

easily and decisively checked, by imposing a state of constant curvature on the basic figures which, replicated in both directions, give (c) or (d). Thus, when the external nodes of (e) and (f) are given slopes and deflections corresponding to states of constant curvature, either the elements behave, or they misbehave. That is, the internal node either takes up its correct slopes and deflection corresponding to the required state of constant curvature, or it does not. With the non-conforming triangle, (e) behaved but (f) did not. (Despite this result, the element is useful and gives accurate results in practice.)

These observations did not complete the research. The theory they suggested showed that, provided the element has certain symmetries possessed by every practical element, mesh (c) converges, regardless of the angles of the three sets of parallel lines. This property extends also to the general anisotropic case, and it even extends to the case where the integration formula is not accurate enough to give correct stiffness coefficients [4]. As a bonus, the theory predicts correctly [1] that a mesh of equal Melosh rectangles converges.

These observations and theoretical predictions seem to be at variance with the conclusions of Ref. [2]. It is the purpose of the present note to clarify what has been proved.

The important point is that the convergence proof presented in Ref. [2] depends on u_{cn} belonging to C_{1n}, as indicated in the text.

The analogy with the case of Poisson's equation permits the conclusion that u_{cn} belongs to C_{1n} in the case when operator A is a second order differencial operator and the components of f_n (body force density components in the elastic case) corresponding to the successive approximate solutions, remain continuous and bounded within each element as the size decreases indefinitely. This is the case in two- and three-dimensional elasticity, and hense also for plates, shells and beams if the transverse shear deformation has not been neglected.

The situation changes however if the order of the highest derivative of u_i contained in A exceeds $p_i + 1$, because the boundedness of the components of f_n does not then ensure the boundedness of the $(p_i + 1)$th derivatives of the field component u_i. The $(p_i + 1)$th derivatives can, for instance, be constant within each element but unbounded as the size decreases indefinitely, whereas the $(p_i + 2)$th derivatives vanish and are thus bounded.

Such is the elastic theories which result from neglecting the transverse shear deformation. The appropriate convergence conditions can be established by resorting to the convergence conditions of the corresponding theories in which the transverse shear deformation is not neglected.

In the simplified theory of thin plates, for instance, A is a fourth order operator and $(p_i + 1)$ is equal to 3. The convergence conditions are, completeness, and the condition that the third derivatives of the transverse displacement, corresponding to the successive approximate solutions, remain bounded within each element as the size decreases (see Ref. [5]).

The union jack mesh (d) does not give convergence because the third derivatives of the transverse displacement are unbounded as the size of the element decreases. Such derivatives remain bounded in mesh (c) : convergence is thus obtained. If conformity were guaranteed, completeness would be sufficient for convergence regardless of the mesh pattern. Completeness and the boundedness of the $(p_i + 1)$th derivatives corresponding to the successive approximate solutions appear to be sufficient convergence conditions in the general case.

Such conditions can at least be shown to be sufficient if a type of element exists with the same general shape and nodes as the one which is to be investigated, but meeting both completeness and conformity conditions. Let u^*_{an} be the field generated by such an element, when the nodes and nodal displacements are the same as those corresponding to u_{an}. The same argument that was used to prove the completeness criterion in section 9 of Ref. [3] may indeed be used again (if the $(p_i + 1)$th derivatives of u_{an} are bounded) to show that the distance between the two fields u^*_{an} and u_{an} can be smaller than a given positive and arbitrarily small number. As u_{an} is a compatible field, the inequality (116) of Ref. [3] remains valid and the convergence proof continues as in Ref. [3].

Bruce M. Irons, and Olgeird C. Zienkiewicz
School of Enginnering, University College of Swansea, Great Britain.

Eduardo R. de Arantes e Oliveira
National Civil Engineering Laboratory, Lisbon, Portugal.

REFERENCES

[1] J. L. Tocher and K. K. Kapur, Comment on, The basis of derivation of matrices for the direct-stiffness method. *AIAA Jnl* 3, 1215 (1965).

[2] G. P. Bazeley, K. Cheung, B. Irons and O. C. Zienkiewicz, Triangular elements in plate bending — conforming and non-conforming solutions. Cont. on Matrix Methods in Struct. Mechs, AFFDL-TR-66-80 (Air Force Institute of Technology, Duyton, Ohio), p. 573, Oct. 1965.

[3] E. R. de A. Oliveira, Theoretical foundations of the finite element method. *Int. J. Solids Struct.* 4, 929 (1968).

[4] R. G. Anderson, B Irons and O. C. Zienkiewicz, Vibration and stability of plates using finite elements. *Int. J. Solids Struct.* 4, 1031 (1968).

[5] E. R. de A. Oliveira, Completeness and convergence in the finite element method. *Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Sructural Mechanics* (1968).

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

LISNAVE — Estaleiro da Margueira — Doca n.º 10.

OBRAS PÚBLICAS
CONSTRUÇÃO CIVIL—INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARÍTIMAS E PORTUÁRIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

é vasto o nosso campo de acção

6 DELEGAÇÕES NA METRÓPOLE E ULTRAMAR

CONSTRUÇÕES TÉCNICAS, LDA.

MOAGEM DA BEIRA - MOBEIRA — Moçambique — Cidade da Beira — Construção de oito células cilíndricas com diâmetro interior de 7 metros e altura de 26,5 metros (moldes deslizantes).

OBRAS PÚBLICAS

CONSTRUÇÃO CIVIL–INDUSTRIAL E URBANA

PROSPECÇÃO GEOTÉCNICA • FUNDAÇÕES ESPECIAIS • CONSOLIDAÇÕES
OBRAS MARITIMAS E PORTUARIAS • PONTES E VIADUTOS • SILOS E CHAMINÉS
INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS

C. D. U. 669.1

PROGRESSOS RECENTES NA INDÚSTRIA DO AÇO*

por B. B. ARGENT, B. Met., Ph. D.
Professor no Departamento de Metalurgia da Universidade de Sheffield (U.K.)

RESUMO

Nesta conferência fez-se uma revisão de alguns dos progressos mais prometedores na indústria do aço que poderão vir a afectar o equilíbrio entre a procura e a capacidade de produção Analisaram-se, portanto, técnicas recentes de redução do ferro, aciaria e fabricação no que diz respeito aos seus problemas tecnológicos e viabilidade económica. Foi dada ênfase ao papel que o controle desempenha no «management» e na tecnologia. Discutiu-se ainda, sumàriamente, a importância que estes novos progressos poderão vir a ter no futuro da indústria portuguesa do aço.

SYNOPSIS

Some of the most promising developments in the steel industry which are likely to affect the balance between demand and production capacity have been reviewed. Recent techniques used in ironmaking, steelmaking and fabrication have therefore been analysed with respect to their technological problems and economic viability. Special emphasis was given to the part that control plays in management and in technology. The importance that these new developments may have in the future of the portuguese steel industry was briefly discussed.

1. INTRODUÇÃO

O aço é um dos mais baratos materiais de construção em engenharia. A despeito dos progressos no abastecimento de outros metais e na produção de plásticos, os mercados em que estes competirão com o aço estão provàvelmente limitados aos campos de embalagem e estruturas leves, e mesmo nestes a indústria do aço pode competir criando novos produtos tais como aço revestido a plástico que reune as vantagens destes dois materiais.

Ao longo dos séculos a produção de aço aumentou sistemàticamente, àparte períodos de depressão económica mundial como a dos princípios da década de 1930 (fig. 1). Uma extrapolação da evolução da produção bruta mundial de aço feita por Lord Layton ([1]), director comercial de British Steel Corporation, sugere uma produção total de 800 milhões de toneladas de aço por ano para 1985. Esta data foi tida como apropriada para uma previsão a longo prazo.

O consumo de aço nos países desenvolvidos está grosseiramente relacionado com o rendimento «per capita» médio do país, 30-50 kg/$100 U. S./ano. Os Estados Unidos consomem cerca de 650 kg/cabeça/ano e a média mundial é aproximadamente de 150 kg/cabeça. Podemos então esperar um eventual aumento de procura em Portugal da ordem de 5 000 000 ton/ano. Podemos comparar este número com o verificado em

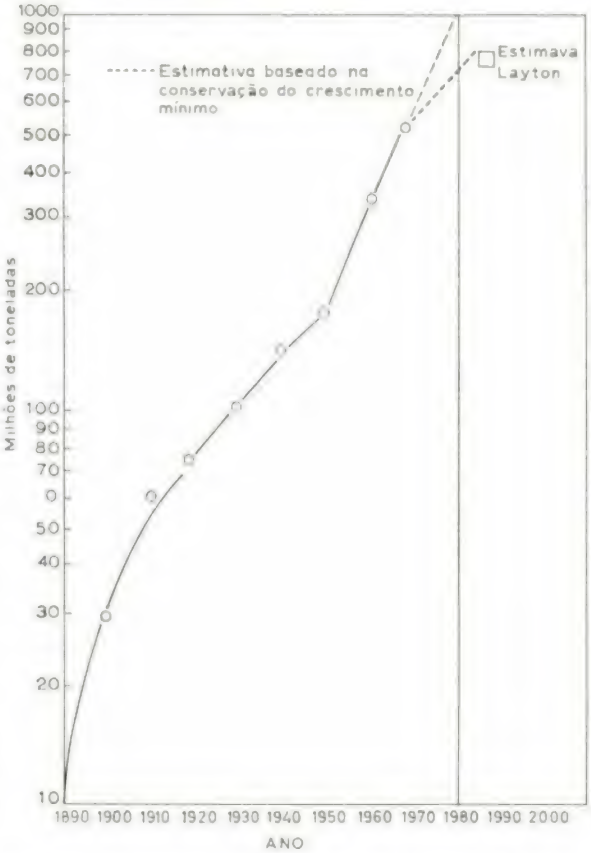


Fig. 1 — Crescimento da produção mundial de aço de 1890 a 1968.

* Conferência organizada pelo Laboratório de Física e Engenharia Nucleares (Grupo de Metalurgia) e proferida no anfiteatro do Laboratório Nacional de Engenharia Civil em 25 de Setembro de 1969.

1967, que foi inferior a 1 000 000 de toneladas, das quais uma fracção importante foi importada. Será então de esperar um substancial aumento no consumo de aço à medida que a prosperidade do país aumenta e talvez não seja insensato prever uma taxa de aumento de procura de 8% por ano, até atingir 3 000 000 toneladas/ano em 1985.* A fig. 2 dá uma ideia do que isto significaria se

«rails», dormentes e «fishplates»	35.000 ton
chapa 3 mm	380.000
secções	312.000
arcos e acessórios	44.000
banda laminada a quente	197.000
banda laminada a frio	63.000
«bright steel bar»	64.000
folha	387.000
folha estanhada, folha preparada	154.000
forja	20.000
aços vazados	31.000
aços de liga	131.000

Fig. 2 — Distribuição de uma produção de 3 milhões de toneladas de aço em proporções semelhantes às do U. K. em 1967.

a distribuição dos produtos fosse a mesma que se verifica no Reino Unido. Contudo deve-se acrescentar desde já que esta não será na realidade uma comparação muito aceitável na medida em que os moldes de consumo variam de país para país. A intenção é, principalmente, dar uma ordem de grandeza dos produtos requeridos.

Nos últimos dez anos, a capacidade de produção excedeu em 50 milhões de toneladas a produção mundial total; no entanto como este número apenas representa 10% da referida capacidade, ele não é certamente suficiente para afectar a viabilidade económica de uma siderurgia moderna. Contudo, esta tendência para a capacidade produtora exceder ligeiramente a produção representa uma ameaça para unidades obsoletas e para organizações usando práticas antiquadas. Há necessidade de olhar contìnuamente em frente, o que implica a adopção das mais modernas técnicas de administração para assegurar a «performance» e perspectivas de cada empreendimento. Algumas das técnicas essenciais para o estabelecimento da viabilidade económica dos actuais e dos novos processos estão sintetizadas nos pontos seguintes:

i. Planeamento

i.1 — pesquisas extensivas ao mercado

i.2 — avaliação da rentabilidade dos investimentos usando técnicas de «discounted cash flow»

i.3 — custos marginais para expansão da produção

i.4 — «Network analyses»

ii. Controle

ii.1 — custos standard de produção

ii.2 — técnicas de controle de «stocks» para minimizar os custos de armazenagem»

ii.3 — utilização de técnicas de programação linear

ii.4 — controle de qualidade para garantir a aceitabilidade do produto.

Estas técnicas devem ser usadas em cada caso particular para se estabelecerem objectivos definidos a todos os níveis de administração. Infelizmente há poucas conclusões que possam ser transpostas de um local para outro e os problemas devem em cada situação ser abordados de novo.

A escolha de uma nova unidade e de novos processos está também sujeita aos habituais condicionalismos metalúrgicos devidos ao tipo de produto requerido e ao número de unidades necessárias para prover a uma indispensável uniformidade do produto (muitas vezes, mais de 50% da produção deverá depender apenas de uma unidade). Este facto pode ter um efeito estratégico determinante se estamos entregues a determinado tipo de empreendimento e desejamos mudar para outro.

* A taxa internacional é, presentemente, 8 a 12% por ano.

Nesta ordem de ideias pensamos que a indústria do aço em Portugal deparará, nas próximas duas décadas, com uma série interessante de opções. A procura expectável para o aço em Portugal é pequena comparada com a capacidade prevista para várias grandes siderurgias na Europa e Japão. Deste modo, as unidades mais económicas a instalar serão provàvelmente diferentes das que seriam escolhidas para países com maior procura de aço. Isto é na maior parte devido ao facto de que, como Leckie e Morris (2) salientaram, acima de 1,5 milhões de toneladas/ /ano, a rentabilidade de uma empresa depende mais da percentagem da capacidade de produção utilizada do que das dimensões das instalações. É provàvelmente mais económica uma expansão baseada em certo número de unidades de tamanho médio do que num menor número de unidades de grandes dimensões, porque assim se poderá seguir mais de perto as tendências do mercado de vendas.

Propomo-nos abordar primeiramente a fabricação de gusa, depois a aciaria e finalmente o fabrico de produtos intermédios e acabados.

2. PRODUÇÃO DE GUSA

Devem ser considerados dois caminhos:

1 — o tradicional alto forno, produzindo gusa com alto teor de carbono.

2 — técnicas de redução directa produzindo material com 92-95 % de ferro, do qual 92 a 97 % no estado metálico, ex.: por um forno rotativo SLRN ou pela técnica de leito fluidizado ESSO FIOR.

2.1 — Altos fornos

Estas unidades desenvolveram-se grandemente em dimensões e produção nos últimos 20 anos. O maior alto forno japonês, FUKYAMA 2, tem um diâmetro de cadinho de 11,2 m e produz 6000 toneladas de gusa por dia (3). A mesma companhia está presentemente a construir um alto forno com 11,8 m de diâmetro para produzir 7000 toneladas por dia. De acordo com Leckie (4), há uma relação geral entre os custos de funcionamento, produção e dimensões, que favorece as grandes unidades desde que estas sejam utilizadas perto da sua capacidade nominal. *

As dimensões, por si só, não são garantia de uma produção volumosa ou económica. Em particular é necessário um bom controle da marcha do alto forno. A marcha dos altos fornos japoneses tem fornecido resultados excelentes em virtude da atenção dada às características a seguir mencionadas. Estes factores conduzem a uma marcha mais rápida com menor consumo de coque.

1 — Controle da carga

O alto forno Fukuyama utiliza:

a) 70 % sinter (6,7-50,8 mm, < 5 % de 0 a 5 mm) de basicidade controlada.

---

* É notável que as mesmas considerações se podem aplicar aos custos de frete e usando mineraleiros de 100 000 toneladas estes custos para o Japão descerem a 1/3 dos que se verificaram em 1960.

A fig. 3 mostra como os custos descem com o aumento de produção.

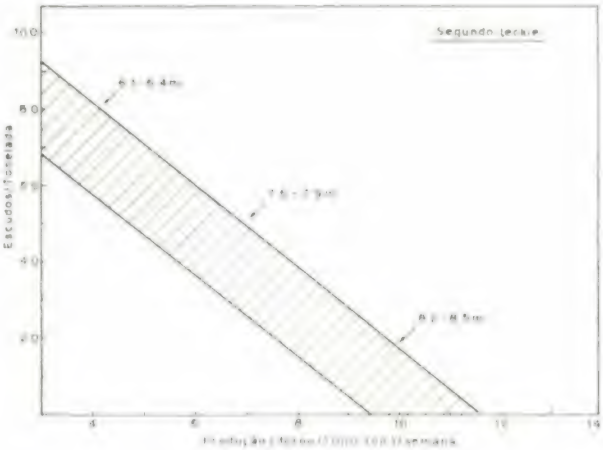


Fig. 3 — Custos operacionais do A.F. em função da produção (segundo Leckie) (4). Representa-se o excesso de custos relativos aos verificados num A.F. com 9,75 m de diâmetro, 1 750 kg/ton de carga e B.O.I. = 90, em função da produção.

A fig. 4, por outro lado, mostra claramente os inconvenientes de trabalhar abaixo da capacidade óptima.

Embora ao longo desta exposição se tenham convertido os custos ingleses em escudos, isto não significa que se considere que os custos avaliados tenham algum significado absoluto no caso português Eles são apenas dados para ilustrar tendências que têm um significado geral.

b) 30 % de minério calibrado (9,5-25,4 mm)
c) 475 kg de coque/tonelada, de alta resistência mecânica para manter a permeabilidade, com baixo conteúdo em enxofre para reduzir o volume de escórias (250-275 kg esc./ton).

2 — Temperaturas de vento mais elevadas

O Fukuyama trabalha a 1.150°C em comparação com os 800-1000°C usuais noutras siderurgias.

3 — Inspecção de combustível

No Fukuyama utiliza-se 28 a 29 kg de óleo/tonelada para reduzir o consumo de coque altamente dispendioso.

(n.b. A quantidade óptima de coque com injecção de combustível é de 365 kg/ton com 155 kg/ton de óleos pesados e 27 % de oxigénio no vento; a melhor proporção sem injecção de combustível é 465 kg/ton).

4 — Alta pressão na goela.

O Fukuyama trabalha a 1,8-0,5 kg/cm² e uma pressão de vento de 2,6 kg/cm².

(Na U.R.S.S. usa-se mais alta pressão para permitir maiores quantidades de vento sem o perigo de criar chaminés na carga).

5 — Controle térmico do forno por:

a) volume de vento (resposta rápida)
b) adição de vapor de água ao vento (resposta lenta)
c) adição de oxigénio para permitir o uso de mais óleo.

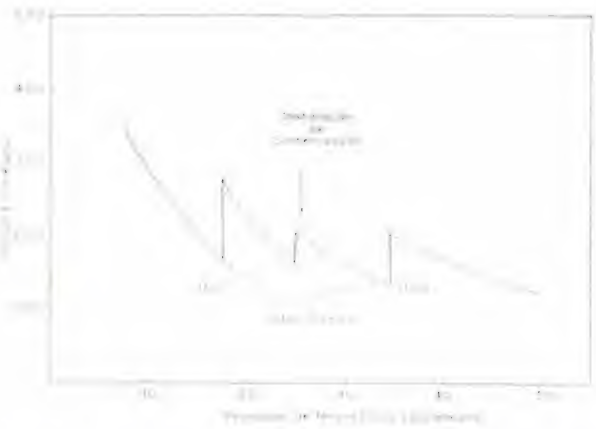


Fig. 4 — Encargos na produção de ferro (segundo Leckie) (7). Apresenta-se o excesso de custos de funcionamento e custos fixos relativos a instalações A.F. e sinterização, trabalhando em condições de capacidade óptima.

Um indicador denominado Índice de Produção do A.F. (B.O.I.) dado por:

$$B.O.I. = \frac{P(B + 10)}{72(D - 10)}$$

em que: P é a produção em ton/dia, B o peso da carga em cwt/ton ferro e D o diâmetro do cadinho em pés,

tem sido usado para comparar a produção de várias unidades, quando compensadas na diferença de dimensões e tonelagem de carga. O Fukuyama atinge um índice 128 enquanto em muitos casos se considera já bom um valor de 70 a 80. Nesta base, parece valer a pena investigar, variando as condições operacionais, para aumentar a produtividade antes de considerar um posterior investimento de capital. Poder-se-á talvez aumentar de 50 % uma actual produção com um dispêndio consideràvelmente menor que o exigido por uma nova instalação. De facto entre 1950 e 1962 as instalações NKK Kawasaky aumentaram a produção de cada um dos seus fornos de 6,9 m de 600 para 1300 ton/dia.

Nova aparelhagem acessória poderá ser também um investimento rentável, como por exemplo, para:

a) análise dos gases da goela
b) medição da temperatura das paredes
c) medição da pressão para avaliação da permeabilidade
d) análise do «stockline profile»
e) análise contínua da carga
f) controle por computadores para maximizar a produção, reduzir o consumo de coque e melhorar a qualidade do produto.

2.2 — Redução directa

Os processos de redução directa merecem análise cuidada pois poderá em breve ser possível utilizá-los econòmicamente para mais baixos níveis de produção que os dos processos convencionais. Dailey (5) sugere mesmo que os custos fixos de produção combinada de ferro e aço podem ser 30 a 40 % mais baixos do que para o alto forno e via B.O.F., e os custos de produção inferiores

em 5% para uma capacidade de 3 000 000 de toneladas.

Será possível usar ferro de redução directa de 3 modos:

1 — Como carga de alto forno, para aumentar a produção, particularmente quando outras unidades estão em reparação ou há uma pressão temporária da procura.

2 — Como carga para fornos de arco. Nas discussões do centenário do «Iron and Steel Institute»,* em Londres, Mr. Ascough da B. S. C. Colvilles (6) sugeriu que, com a energia a 0,0204 esc./kwh e o ferro de redução directa a 700-800 esc./ton, esta aplicação seria econòmicamente atraente para o Reino Unido. Mr. Mekenzie da B. S. C. Midlands Group indicou nessa altura, contudo, que na sua opinião um preço de 2050 escudos seria mais realista. Òbviamente a discussão àcerca das perspectivas económicas do processo continuará por longo tempo mas podemos já referenciar que os tempos entre os vazamentos podem ser consideràvelmente reduzidos por adopção de uma alimentação contínua a «pellets» (7). Isto porque se podem usar maiores níveis energéticos utilizando uma camada de «pellets» para proteger os refractários (fig. 5).

3 — A terceira mais importante aplicação para o ferro de redução directa pode ser na forma de pó. Haveria reduções muito significativas na energia necessária para a produção de banda se, tanto:

a) o sistema de redução, sinterização e laminagem da Fundação de Pesquisas de Ontário (8), como:

b) um sistema de laminagem directa do pó,

se tornarem econòmicamente viáveis. Isto depende em grande parte de uma redução muito considerável do custo do pó de ferro.

Uma aplicação mais imediata do pó de ferro de redução directa pode ser a produção de esboços forjados, requerendo apenas um limitado grau de consolidação na forjagem.

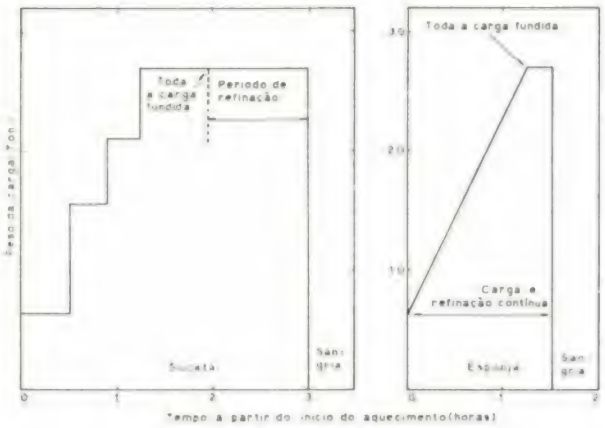


Fig. 5 — Comparação dos tempos entre sangrias na fusão em forno de arco para cargas de sucata e esponja (segundo Sibakin, Hookings e Roeder) (7).

3. ACIARIA

Actualmente os fornos de soleira básicos fabricam ainda a maior parte da produção mundial de aço, mas esta percentagem já baixou do máximo de 80% para 55%, enquanto a produção pelo processo L. D. cresceu para 25% e a respeitante aos fornos de arco para 15%. Provàvelmente estas tendências manter-se-ão e assim dedicaremos a nossa atenção aos processos básicos usando oxigénio e fornos de arco.

3.1 — Aciaria B. O. F.

Este processo desenvolveu-se muito ràpidamente, especialmente no Japão, onde 2/3 da produção total de aço são presentemente obtidos por esta técnica. A dimensão dos fornos tem vindo a aumentar, de modo que temos hoje fornos de 300 toneladas de capacidade com tempos entre vazamentos inferiores a 50 minutos. Isto significa que um conjunto de três fornos B. O. F. pode produzir cerca de 4,5 milhões de toneladas de aço por ano. A percentagem de sucata carregável no convertidor L. D. está geralmente entre 17 e 30%. Esta quantidade é inferior às disponibilidades de sucata em muitos países desenvolvidos tais como U. S. A. (44%) e U. K. (47%), levantando-se a

* Neste encontro foi apresentado uma série de excelentes artigos de revisão que cobriam todo o campo de Tecnologia do ferro e aço, razão por que lhe é feita frequente referência. Estes artigos estão publicados no exemplar de Junho de 1969 do «Journal of the Iron and Steel Institute».

necessidade de usar fornos eléctricos para fundir a sucata disponível, pois esta é relativamente barata quando comparada com o ferro obtido no alto forno. A figura 6, obtida de um artigo de Marshall (9), põe em evidência o modo como os custos de produção do aço dependem da percentagem do metal fundido usado e das dimensões das unidades.

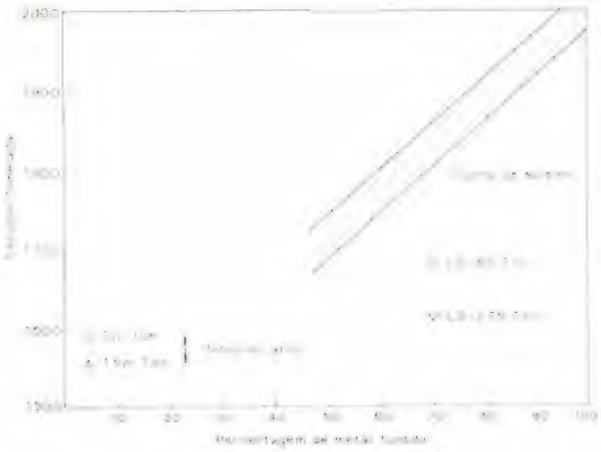


Fig. 6 — Custos da produção de aço em função da quantidade de metal fundido usado (segundo Marshall) (9).

Tal como na produção de ferro, uma das preocupações actuais é obter um melhor controle do processo B. O. F.. Este objectivo pode alcançar-se por um aumento de automatização do processo usando informações obtidas por monitoração do volume de oxigénio fornecido, temperatura, volume e análise dos gases de escape. Os instrumentos de medida precisam ainda de ser melhorados para uma medição contínua da temperatura e do conteúdo em oxigénio do aço.

Estão a desenvolver-se métodos para a produção de aços de carbono médio usando técnicas de descarbonização. Estas dependem da obtenção de curvas reprodutíveis de descarbonização e Meyer (10) mostrou que isso é possível se prèviamente se obtiver um equilíbrio entre a oxidação e descarbonização do metal na emulsão escória-metal-gás. No mesmo artigo Meyer mostra que é possível produzir aço inoxidável num convertidor L.D., embora a produção potencial do método seja ainda muito grande para a procura.

3.2 — Fornos de arco

Estas unidades estão também a ser construídas com diâmetros muito maiores, até 7,2 m, e capacidades de 180 toneladas. O rendimento destes fornos é cerca de 90 % e o tempo de operação inferior a 4 h (10). Por exemplo, o conjunto em elaboração em Templeborough, de Steel Peech and Tozer, tem 4 unidades de 135 toneladas cada e 2 de 180, produzindo 1,5 milhões de toneladas anuais de aço com um consumo de energia de 520 Kwh por tonelada.

Para obter produções elevadas deve fazer-se o possível para minimizar as demoras. Isto envolve:

1 — um controle muito cuidadoso do enfardamento de sucatas e carga;

2 — programação de potência a fornecer condicionada pelas restrições máximas da procura;

3 — utilização do oxigénio do modo mais efectivo;

4 — melhoramento dos materiais para eléctrodos e das técnicas de manuseamento;

5 — cuidado na especificação e manutenção dos refractários, usando um programa estudado.

As tendências futuras orientam-se no sentido da utilização de fornos de mais alta potência, usando mais elevadas razões de transformação, seja, 75 000 — 100 000 KVA, que devem dar origem a maiores velocidades de fusão, até 70 ton/h. Se os preços para a obtenção de «pellets» se tornarem razoáveis, serão provàvelmente utilizados como carga contínua para aumentar a velocidade de produção. Foi sugerido (11) que uma carga de 60 % de «pellets» e 40 % de sucata seria uma combinação razoável, na medida em que é necessário usar sucata proveniente de fábricas e sucata proveniente do mercado a preço razoável. O futuro dos fornos de arco parece bom, particularmente no que diz respeito à possibilidade de obter energia mais barata de origem nuclear. Se esta previsão não for totalmente realizável, alguns produtores considerarão possìvelmente a hipótese de usar queimadores a gás ou óleo no período de fusão. Os custos de produção para um processo SLRN e forno de arco foram estimados em 870 esc./ton para uma produção anual de 1,5 milhões de toneladas.

3.3 — Novos processos

Uma série de processos de aciaria contínuos tais como: 1) «Spray Steelmaking process» da BISRA, 2) o processo IRSID ou 3) o processo WORNER que está a ser experimentado em Rio Tinto, estão presentemente a ser apreciados.

Todos estes processos se baseiam no aumento da área de contacto entre o banho metálico e a escória em presença do oxigénio, o que se procura conseguir de diferentes modos. No processo BISRA desintegra-se uma corrente de metal líquido por jactos de oxigénio e cal. No processo IRSID injecta-se oxigénio na superfície do banho metálico contido num recipiente e obriga-se a emulsão escória-banho a escorrer sobre um dique para um recipiente de decantação. O processo WORNER utiliza um tanque comprido onde o banho e a escória circulam em contra corrente. Fazem-se incidir jactos de oxigénio sobre a superfície de modo a formar uma emulsão na parte do forno que constitui o reactor pròpriamente dito.

Muito há ainda para fazer no desenvolvimento de métodos adequados de controle para estes processos. Num futuro ainda distante parece viável que o processo contínuo será usado para o grosso da produção de aço, mas não parece ter suficiente flexibilidade para o pequeno produtor. Num futuro mais longínquo deve dar-se atenção à possibilidade de usar energia nuclear na produção de aço. O Prof. Antonio Antonioli (6) descreveu um projecto de estudo em que a E. E. C. está envolvida, para uma instalação usando 1/3 do calor fornecido por um reactor nuclear refrigerado a gás para uma redução directa, possìvelmente num reactor de leito fluidizado, usando gás natural, sendo os restantes 2/3 para produzir energia eléctrica destinada a fornos de arco para produção de aço a partir do ferro de redução directa.

4. PROCESSAMENTO DO AÇO

As duas modificações mais importantes neste campo tem sido o desenvolvimento de unidades de grandes dimensões para desgasificação em vazio e vazamento contínuo.

4.1 — Desgasificação em vazio

A desgasificação em vazio é presentemente mais significativa na produção de aços ligados para remoção de hidrogénio em grandes lingotes e controle de inclusões (fig. 7 e 8) (12).

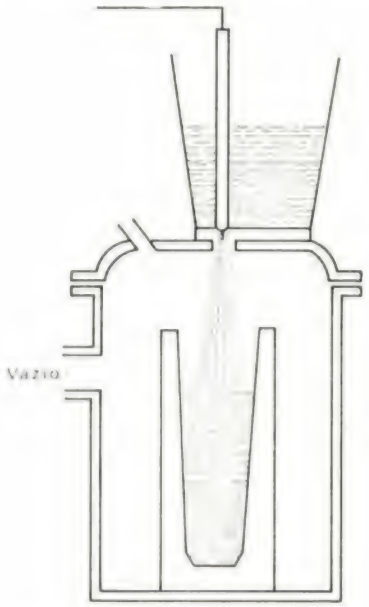


Fig. 7 — Desgasificação em vazio no vazamento para o molde.

De acordo com Holden (13) os custos são da ordem de 28 a 70 esc/ton. Alguns produtores estão a começar a encarar as técnicas DHHU

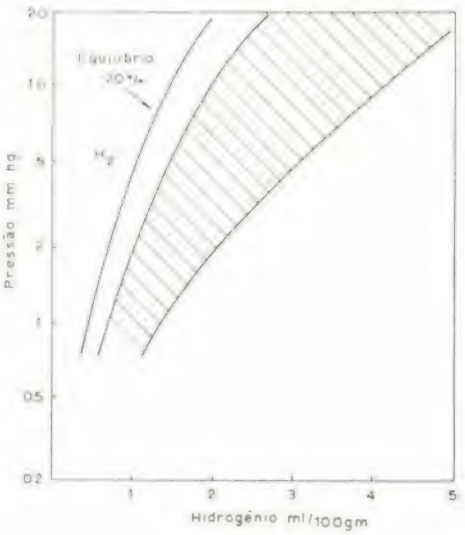


Fig. 8 — Conteúdo em hidrogénio obtido durante a desgasificação em vazio (segundo Speith, von Ende e Pfeiffer) (12).

e RH (fig. 9 e 10) como fornecendo um novo estágio na desgasificação e ajustamento da composição na produção do aço (fig. 11 e 12) (14 e 15). Este novo processo parece ter impor-

Fig. 9 — Representação esquemática de uma unidade de desgasificação D.H.

tância para o grosso da produção de aço, no desenvolvimento de substitutos de aço efervescente para vazamento contínuo. A Companhia

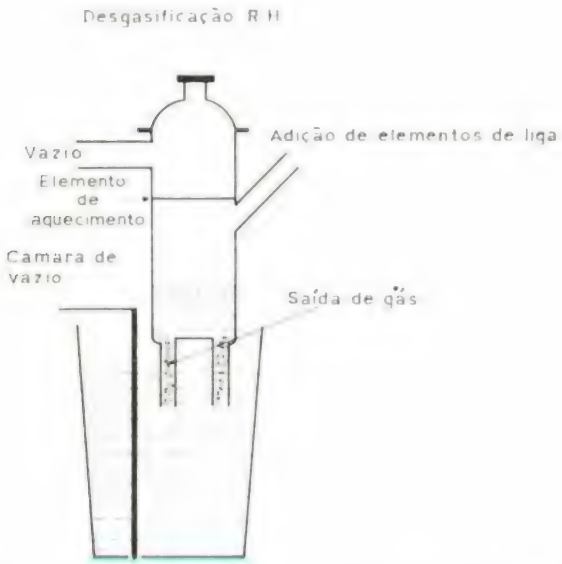


Fig. 10 — Representação esquemática de uma unidade de desgasificação R.H.

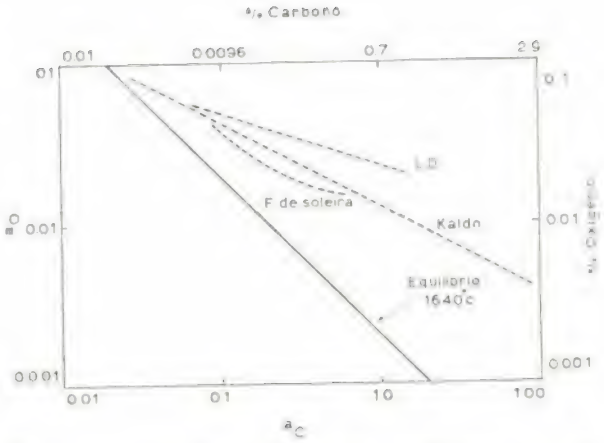


Fig. 11 — Desvio das condições de equilíbrio na reacção carbono-oxigénio verificadas em vários processos de aciaria (segundo Pearson, Venkatari e O'Hanlon) (14).

de Aço de Wales está já a instalar uma unidade DH que terá uma capacidade de 1 000 000 ton/ano.

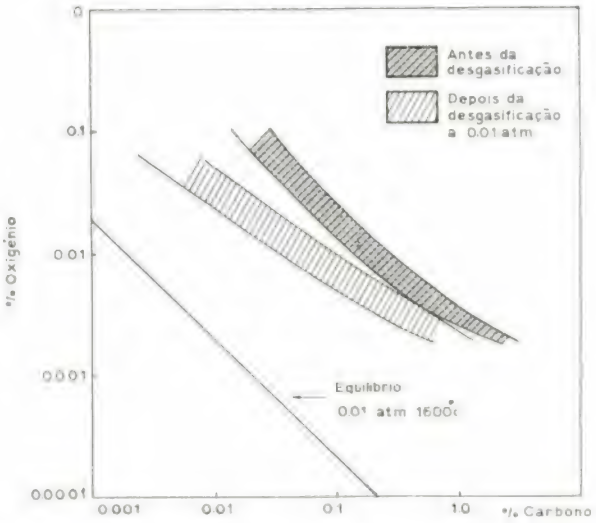


Fig. 12 — Desvio das condições de equilíbrio na reacção carbono-oxigénio nas operações de desgasificação em vazio (segundo Sieckbeit) (15).

4.2 — Vazamento contínuo

Há economias evidentes no vazamento contínuo por causa do aumento de produção e eliminação dos fornos «pits» e trens de laminagem primários. Presentemente existem cerca de 300 unidades na indústria do aço, algumas das quais permitem manusear 200 toneladas de aço de cada vez. Algumas unidades trabalham

Os Mobiltac aguentam-se tanto em serviço, que dificilmente poderemos vendê-los muito.

Esta ventoinha foi pulverizada com Mobiltac e posta a funcionar à velocidade máxima. Nem uma só gota saltou das pás.

Os Mobiltac constituem uma linha de produtos criada especificamente para lubrificação de engrenagens abertas. Por outras palavras, o desperdício de óleo é mínimo ou mesmo inexistente.

Isto significa menor frequência na aplicação, maior protecção das engrenagens e - infelizmente para nós - menos consumo de lubrificante.

Mas a grande adesividade não é a única vantagem dos Mobiltac. Outra, é o seu bom funcionamento a baixa temperatura: mesmo abaixo de zero continua a proteger eficazmente as engrenagens, evitando avarias.

Peça à MOBIL mais informações sobre estes produtos e poderá economizar anualmente milhares de escudos.

Mobil

vendemos mais vendendo menos

Mobil

vendemos mais vendendo menos

«slabs» com secção máxima de 2600 cm^2, mas três companhias podem obter por este processo secções até 6500 cm^2. As velocidades de vazamento variam entre 0,5 e 6 m por minuto para os «billets» mais pequenos. Em termos de tonelagem isto quer dizer que são possíveis cerca de 20 ton/h para cada «strand» com billets de 250 mm e 150 ton/h para os «slab» de maiores dimensões. As produções anuais variam de 10 000 ton/ano para uma unidade de pequena secção apenas com um «strand», até 800 000 ton/ano para unidades com 8 «strand» e grande secção.

Técnicas envolvendo a utilização de moldes curvos ou flexão e rectificação do «strand» reduziram a altura deste equipamento (fig. 13) e os melho-

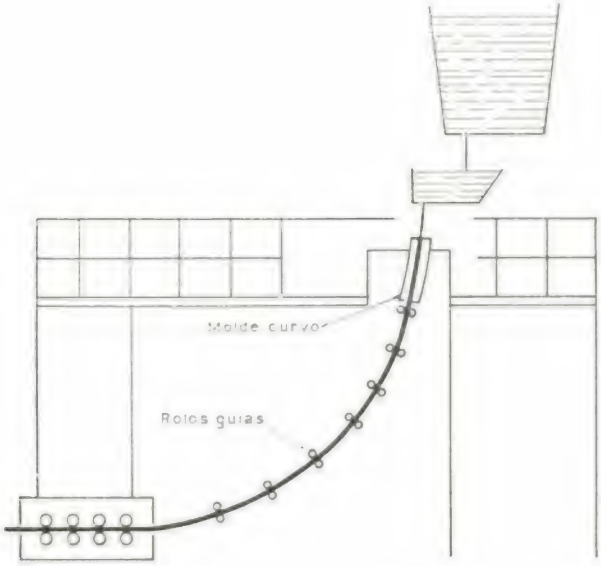


Fig. 13 — Representação esquemática do vazamento contínuo usando a técnica do encurvamento do «strand».

ramentos futuros parecem estar nas técnicas de redução do «strand», moldes de largura variável e sequência de vazamento. Nas técnicas de redução do «strand», os rolos guias comprimem o material vazado quando neste resta um núcleo líquido de 3 a 5% da sua secção. Esta acção obriga o metal fundido a voltar ao molde e parece reduzir substancialmente a porosidade e segregação centrais. Uma posterior redução de secção aumentará a velocidade de produção por «strand» para pequenos «billets» e permite a obtenção de variados tamanhos finais para cada tamanho de molde.

A redução do «strand» está já em aplicação na Badische Stahlwerk onde a produção de dois fornos de arco de 50 toneladas cada é vazada numa unidade de 6 «strand». As dimensões iniciais são 90 × 130 mm posteriormente reduzidas para 90 × 90 mm antes da laminagem em varão para betão armado.

A firma Algona vazou contìnuamente 620 toneladas através de 4 «strand» em 6 h 30 min., e esta tendência manifesta-se ainda numa reivindicação russa de que se conseguiu vazar um «slab» com 1 km de comprimento.

Os custos iniciais citados por Holden (13) foram avaliados em 350-650 esc/ton/ano e os custos de operação são cerca de 70 a 140 esc. mais baixos que os referentes ao processo da produção de lingotes com utilização de trem de laminagem primário.

A grande vantagem do vazamento contínuo é o corte da linha de produção. Reduções por laminagem de 6 : 1 até 10 : 1 consolidam a estrutura central e dão origem a propriedades similares às obtidas em lingotes tratados convencionalmente com reduções de 10 : 1 a 250 : 1. Esta vantagem verifica-se também para «blooms» perfilados e a firma Algona, cooperando com a BISRA, já teve em funcionamento durante um ano inteiro uma unidade de 2 «strand» para vazamento de «blooms» perfilados. Os alongamentos na laminagem são de 9 : 1 a 12 : 1 face aos 55 a 57 : 1 verificados nos processos convencionais.

Os maiores problemas que limitam as velocidades de produção residem principalmente na resistência dos materiais refractários utilizados nos «buzettes» e panelas de vazamento.

5. TRABALHO MECÂNICO

A tendência para o corte das linhas de produção exemplificada pela utilização de vazamento contínuo está também patente na atenção posta na laminagem de pós.

Embora a aplicação desta técnica a aços de baixo carbono dependa de um abastecimento barato de pó de ferro, há uma perspectiva mais imediata na aplicação do processo à produção de banda de aço inoxidável. A laminagem da banda em aço inox é um processo trabalhoso visto que as reduções que se podem efectuar após recozimento são pequenas.

Portanto talvez se possa pagar pó de aço inox produzido por um processo de atomização e ter ainda possibilidades de produzir banda de aço inox econòmicamente.

Àparte estas mudanças radicais nos processos de trabalho mecânico, a tendência actual reside em aumentar a utilização racional das instalações e reduzir as perdas e rejeições através de um controle automático de dimensões. Isto evidentemente significa melhoramento na produção porque para volumes actuais de produção muitos trens de laminagem operarão a 40-50 % do seu tempo máximo de serviço.

O desenvolvimento técnico no que diz respeito à laminagem de varão e barra orienta-se para processos usando «strand» múltiplos, trens mais rígidos e maior controle automático. Por exemplo, Green (16) sugeriu um trem de laminagem para varão com 4 «strand» produzindo varão com 5 a 12,5 mm de diâmetro. As técnicas de «strand» múltiplos são usadas para as etapas grosseiras e intermédias e nos estádios finais usam-se 4 «strand» simples com velocidades de acabamento até 3 m/minuto e uma produção até 500 000 ton/ano. Os «billets» iniciais têm até 100 mm² de secção e um comprimento de 12-18 m.

Juntamente com estes melhoramentos temos modificações nos fornos incluindo a introdução do «walking beam» e «notched hearth» que são muito mais flexíveis que os «pusher furnaces» quando há atrasos na laminagem.

Nas últimas operações da produção estão a ser usados «open coil laying» e arrefecimento controlado ao ar, para melhorar a estrutura dos produtos para aplicações em trefilagem. A tendência para as grandes unidades é mais marcada nos trens de laminagem de banda, a quente, produzindo 3 a 4 milhões de toneladas por ano. Isto trouxe a necessidade de aumentar a velocidade de decapagem, usando, por exemplo, ácido clorídrico em vez de sulfúrico, e, para a chapa estanhada, a necessidade de prover unidades contínuas de recozimento e revestimento.

Estas unidades podem trabalhar agora até 600 m/minuto. Os custos iniciais destas unidades são elevadíssimos e não podem portanto ser subutilizadas. O quadro da fig. 14 mostra os custos aproximados das unidades de produção de aço e ferro segundo Lekie e Morris (2) e põe em evidência os altos custos dos trens de laminagem a quente para a produção de banda.

6. PRODUTOS

Os progressos na metalurgia dos materiais ferrosos continuam com grande expansão, mas men-

Unidades	Produção (milhões de ton/ano)	Custos (milhões de escudos)	Custos por ton/ano (escudos/ton)
5 altos fornos (9.75 m) e unidades associadas de sinterização e manuseamento do minério	5	5.250	1.050
6 convertidores L. D. (200 ton.) . . .	6,4	3.220	500
2 fornos de arco de 90 ton	0.36	260	720
2 fornos de arco de 90 ton	1,5	700	470
Vazamento contínuo (Holden) (13) .			350-560
Trem universal de «slabs»	4,5	980	218
Trem simples de chapa 210 cm . . .	0.3	780	2.600
Trem simples de chapa 330 cm . . .	0,5	1.099	2.198
Trem para banda a quente (205 cm) .	3,25	2.300	710
Trem para banda a frio (205 cm) . .	0,8	630	790
Trem de «blooms» (107 cm)	1,55	350	226
» » «billets»	1,0	560	500
» » barra	0,25	420	1.680
» » varão	0,25	350	1.400
» » secções médias	0,4	510	1.270

Fig. 14 — Custo de várias unidades siderúrgicas (segundo Leckie e Morris) (2)

cionaremos apenas três campos onde o seu efeito na tecnologia da produção é susceptível de ser mais significativo. Estes são:

1 — Aplicação de ciclos rápidos de recozimento para obter grão fino em banda, ex. 6-8 μ ao recozer, após 85 a 90% de redução a frio (aquecendo a 700 °C em ~ 30 s e arrefecendo de novo até 200 °C em 100 s.). Esta técnica leva-nos à obtenção de uma tensão de cedência de 41 kg/mm² na folha estanhada (0,07% C.)

2 — Utilização de laminagem controlada para produzir aços estruturais de alta resistência. Nesta técnica controla-se de novo o tamanho do grão. Neste caso a resistência depende de dois factores: primeiramente adicionando 0,03% de nióbio obtém-se carbonetos de nióbio estáveis que ajudam a controlar o tamanho do grão; depois um controle cuidadoso dos esquemas de aquecimento e laminagem dá azo a que certa fracção de carboneto de nióbio se dissolva a alta temperatura e se precipite na matriz ferrítica de grão fino (fig. 15) (17). Estes

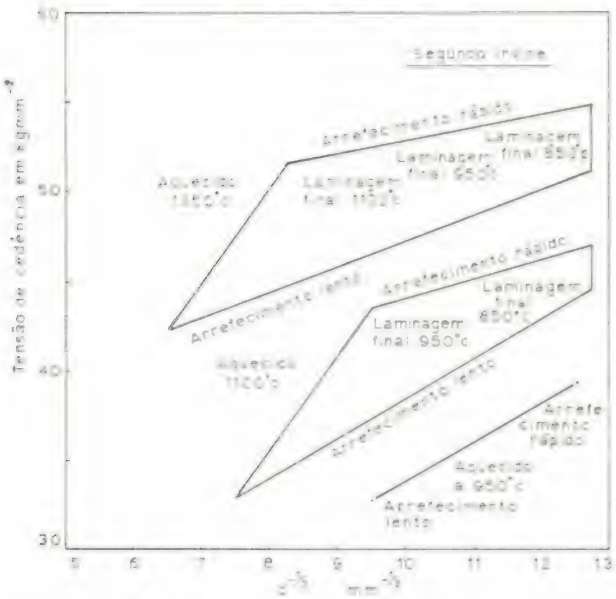


Fig. 15 — Tensão de cedência dos aços contendo Nióbio em função do tamanho de grão e tratamento térmico (segundo Irvine) (17).

aços estruturais de alta resistência com tensões de cedência até 50 kg/mm² poderão ser obtidos a preços para os quais a economia em peso numa estrutura fàcilmente compensará o excesso de custo requerido se os trens forem concebidos para suportar os novos esquemas de laminagem. Actualmente a interrupção dos ciclos normais dá azo a encargos elevados.

3 — A utilização de técnicas de extrusão e forja a frio para enformar aço com 0,1% C. Esta técnica economiza muito material quanto comparada com a maquinação e é a melhor para enformar um grande número de componentes industriais.

7. CONCLUSÕES

Em conclusão: — Está a processar-se uma rápida evolução na indústria do aço e a procura para o material parece continuar a aumentar. O controle é de importância vital na administração e na tecnologia. Um país como Portugal, que expandirá provàvelmente a sua indústria siderúrgica na próxima década, terá muitas e fascinantes decisões a tomar.

As mais importantes serão:

1 — Até que ponto o ferro de redução directa e os fornos de arco fornecem uma via económica de produção de aço.

2 — Até que ponto o vazamento contínuo substituirá os processos convencionais utilizando o lingote e a laminagem primária para obter «blooms» e «slabs».

3 — Até que ponto o controle dos processos de laminagem será usado para obter propriedades prèviamente conseguidas através de tratamentos térmicos ou elementos de liga.

AGRADECIMENTO

O Grupo de Metalurgia do L. F. E. N. agradece à Direcção Geral do Laboratório de Física e Engenharia Nucleares por ter tornado possível a efectivação desta conferência e à Direcção do Laboratório Nacional de Engenharia Civil pela amável cedência do anfiteatro.

A tradução foi feita pelo Eng.º José Manuel Nunes de Almeida Sequeira do Grupo de Metalurgia do L. F. E. N.

REFERÊNCIAS

(1) Lord Layton, J. I. S. I. (1969), *207*, p. 713.

(2) A. H. Leckie e A. J. Morris, J. I. S. I. (1968), *206*, p. 442.

(3) G. Suzuki, M. Higuchi e T. Shibuya, J. I. S. I. (1969) *207*, p. 751.

(4) A. H. Leckie, I. S. I. Spec, Pub. 102, (1967) p. 13.

(5) Dailey AIME meeting Atlantic City, 1968 citado por J. Mackenzie, J. I. S. I. (1969) *207* p. 765.

(6) H. H. Ascough, J. I. S. I. (1969) *207* p. 1306, A. Antonioli, *ibid.*

(7) J. G. Sibakin, P. H. Hookings e G. A. Roeder, J. I. S. I. (1967) *205* p. 1005.

(8) J. G. Sibakin e H. J Fraser em «Aspects of modern ferrous metallurgy» Ed. J. S. Kirkaldy e R. G. Ward (1964) London, Blackie.

(9) D. F. Marshall, J. I. S. I. (1969) *207* p. 772.

(10) H. W. Meyer, J. I. S. I. (1969) *207* p. 781.

(11) G. R. Curtis, C. R. Taylor e W. M. Rankin, Iron and Steel Engineer (1969) *46* p. 112.

(12) K. G Speith, H. vom Ende e A. Pfeiffer, Stahl u. Eisen (1960), *80*, p. 737.

(13) C. Holden, J.I.S I. (1969), *207*. p. 806.

(14) T. F. Pearson, A. S Venkatadri e J. O'Hanlon, J I S.I. (1966) *204*, p. 907.

(15) A. Sickbert, I S.I. Spec. Rep. No. 92 (1965), p. 95.

(16) R. Green, J I.S I. (1969), *207*, p. 921.

(17) K. J. Irvine, J.I S.I. (1969), *207*, p. 837.

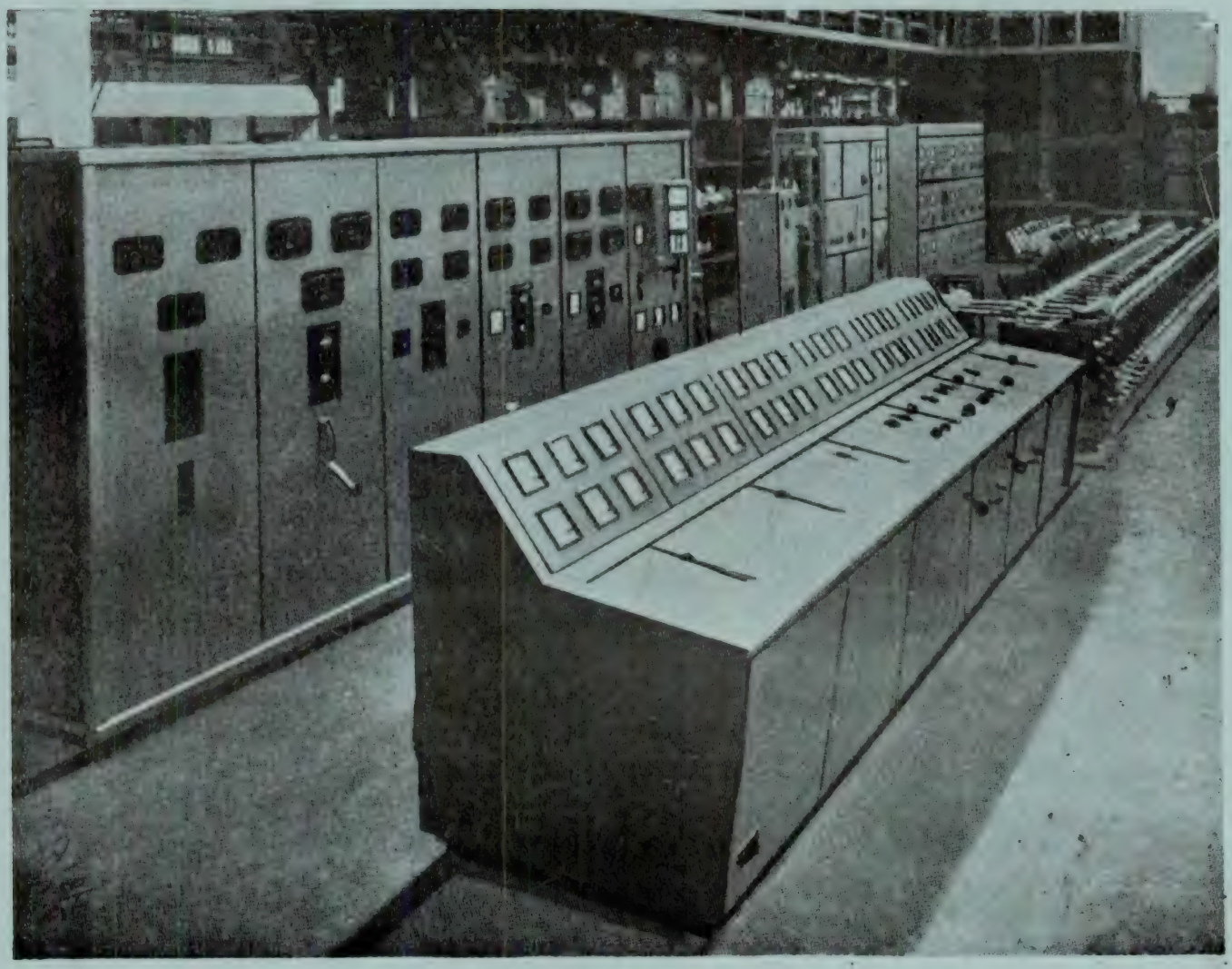
JAYME DA COSTA, L^DA

MECÂNICA E ELECTRICIDADE EM TODAS AS APLICAÇÕES

PORTO
Praça da Batalha, 12
Telef. 2 28 12 (PPC)

LISBOA
Rua dos Correeiros, 14
Telef. 32 70 35 (PPC)

LUANDA
Cx. Postal 5174
Telef. 4743



Material fabricado nas nossas oficinas, pronto para expedição

- Fabricação de aparelhagem eléctrica de alta e baixa tensão
- Equipamentos electromecânicos completos para centrais e fábricas
- Postos de transformação tipo monobloco
- Quadros blindados, capsulados e em armário
- Armaduras de iluminação de todos os tipos
- Contadores eléctricos e instrumentos de medida
- Telemedida e telecomando
- Instalações elevatórias de água
- Instalações de saneamento e esgotos
- Ferramentas de corte
- Motores Diesel industriais e marítimos
- Fogões eléctricos
- Frigoríficos
- Ventilação e condicionamento de ar
- Aparelhagem de Raios X e electromedicina

ARMADURA DE ILUMINAÇÃO

TIPOS
ME/BE

SEGURANÇA REFORÇADA

modelos 1×20 a 2×40 watts

Armadura para funcionamento em zonas onde o aparecimento de atmosfera explosiva é acidental.

Segurança reforçada.

CONSTRUÇÕES ELÉCTRICAS SCHRÉDER, LDA.

P. JOSÉ FONTANA, 25-3ºESQ · TEL. 561001/2/3

C. D. U. 621.3:331.713

TEORIA DA QUANTIFICAÇÃO DAS ACTIVIDADES PROFISSIONAIS E SUA APLICAÇÃO À ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

HERMÍNIO DUARTE-RAMOS
Engenheiro Electrotécnico (I.S.T.)
Assistente da U.L. (Angola)

RESUMO

Através da noção de plenitude, que traduz a relação entre uma actividade e os problemas gerais da respectiva profissão, estabelece-se uma teoria de quantificação, que aplicada à engenharia electrotécnica ordena as actividades disponíveis na sociedade.

SYNOPSIS

The relation between an activity and the essential problems of a profession makes possible the quantification of the profession. By means of this theory the electrical engineering activities are ordened.

1. INTRODUÇÃO

Um engenheiro recém-formado, após a formação escolar, encontra-se numa situação de escolha entre várias actividades a que se pode dedicar. Pela carência de elementos no julgamento sobre a direcção a tomar parte da situação embaraçosa para uma resolução baseado frequentemente em factores secundários, decisão por vezes com reflexos desagradáveis, mais tarde, numa altura em que já se torna difícil a mudança de rumo.

Procura-se neste estudo comparar quantitativamente as diversas actividades possíveis do engenheiro electrotécnico na nossa estrutura actual segundo um critério definido a partir da maior ou menor participação nos problemas gerais da profissão. A valorização deve pois ser encarada sob este aspecto. Tecem-se depois considerações sociais a partir da teoria estabelecida.

2. DOMÍNIO DAS ACTIVIDADES PROFISSIONAIS

A noção de *actividade profissional* corresponde à ocupação do homem, em relação à sua profissão, na sociedade em que está integrado.

O domínio de actividades profissionais inerente a uma dada profissão é mais ou menos extenso conforme engloba mais ou menos actividades possíveis nìtidamente bem caracterizadas e, em certa medida, bem diferenciadas. Portanto o *domínio das actividades profissionais* de uma profissão é definido pelo conjunto ordenado, segundo um determinado critério de hierarquia, das actividades profissionais relativas a essa profissão.

Introduz-se uma abstracção na teoria, justificada pela generalidade e simplicidade do tratamento matemático, considerando o domínio profissional, caracterizado entre certos limites, como um conjunto contínuo de actividades. Esta abstracção vai permitir tratar este conjunto como contínuo e por consequência representável gràficamente sobre uma recta.

Na prática todavia apenas existe um número discreto de pontos nìtidamente diferenciados relativos às actividades disponíveis na sociedade. Admite-se então o *1.º postulado* da teoria: as actividades profissionais diferenciadas, estando ordenadas entre os limites do domínio profissional segundo um determinado critério de hierarquia, estão igualmente afastadas entre si. Deste modo se quantificam as actividades entre si.

Assim se a uma profissão corresponde um domínio profissional entre a e b no domínio genérico das actividades profissionais é possível distribuir as n actividades diferenciadas disponíveis na sociedade inerentes a essa profissão no intervalo (a, b), determinando-se pontos igualmente repartidos nesse domínio rectilíneo e limitado (fig. 1).

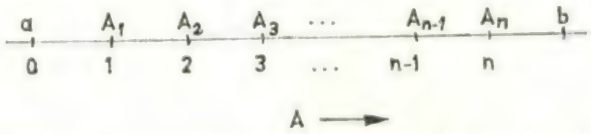


Fig. 1 — Representação gráfica linear do domínio de actividades profissionais de uma profissão.

Exteriormente ao intervalo (a, b) não há actividades ligadas à profissão. Então pode escolher-se, em qualquer caso, o limite *a* para origem de ordenação das actividades e atribuir-lhe o valor nulo.

Em toda a profissão admite-se que existe uma *actividade perfeita*, correspondente a uma noção arquétipa, com a qual o homem completamente formado dentro da sua profissão teria oportunidade de trabalhar com todos os problemas, de qualquer natureza, científica, ética, etc., que a profissão suscitasse. Esta actividade perfeita constituirá um limite que se toma para origem da distribuição de actividades no domínio da profissão e que será atingida pela noção limite de perfeição (dentro do conceito exposto), portanto transcendente.

Depois existem actividades reais, sucessivamente mais imperfeitas por se referirem a aspectos cada vez mais restritos da profissão no que diz respeito aos problemas fundamentais dessa profissão.

Há-de existir uma *actividade total*, caracterizada pela presença de todos os problemas fundamentais ligados à sociedade sem os transcender.

E, por fim, surgirá a *actividade de subsistência* a partir da qual o homem já não exerce actividade dentro da sua profissão, constituindo aquela actividade a última que lhe permite ainda considerar-se na sua profissão, mas já extremamente rarefeita.

3. PLENITUDE PROFISSIONAL

Para ordenação das actividades dentro do seu domínio é necessário definir um critério de valorização que permita quantificar as diversas actividades de uma profissão.

Ora uma profissão é caracterizada por um certo número de *problemas fundamentais* que dão forma à profissão e que estão na base do conjunto das actividades.

Cada uma das actividades pode estar directamente ligada a um ou mais dos problemas fundamentais, pode encontrar-se relacionada directamente com um, menos acentuadamente com outro e desligada dos restantes, ou pode haver, enfim, qualquer outra combinação possível com o número de problemas gerais.

Para se quantificarem as actividades de uma profissão admite-se o *2.º postulado* da teoria que atribui a cada actividade um valor, numa escala arbitrária, conforme se ocupa de cada um dos problemas fundamentais mais ou menos directamente.

Deste modo estabelece-se uma *matriz de coeficientes de actividade* entre cada actividade e cada problema fundamental (Quadro I): o coeficiente C_{jk} traduz a ocupação directa da actividade j com o problema k. Este número é absoluto mas só tem significado relativamente aos restantes, dada a arbitrariedade da escala de valores.

Tipos de activ.	Problemas fundamentais				
	B_1	B_2	. . .	B_p	Totais
A_1	C_{11}	C_{12}	. . .	C_{1p}	C_1
A_2	C_{21}	C_{22}	. . .	C_{2p}	C_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
A_n	C_{n1}	C_{n2}	. . .	C_{np}	C_n
Totais	C'_1	C'_2	. . .	C'_p	C

QUADRO I – Coeficientes de actividade.

A actividade genérica A_j terá portanto um peso total igual ao somatório dos coeficientes de actividade relativos a essa actividade e ligados a todos os problemas gerais

$$C_j = \sum_{k=1}^{p} C_{jk} \quad . \tag{1}$$

Efectuando a soma total dos pesos de todas as actividades obtém-se o peso da profissão na escala arbitrada

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j \tag{2}$$

que se pode fazer igual a 100 %. Por este processo determinam-se os valores relativos dos pesos das actividades em relação ao peso da profissão, expressos em percentagem

$$T_j = \frac{C_j}{C} \, . \, 100 \tag{3}$$

que se denomina *plenitude da actividade profissional* pois traduz a relação directa de um profissional

com a totalidade dos problemas fundamentais da sua profissão.

Por este meio retirou-se toda a influência dos valores absolutos arbitrados para os coeficientes de actividade permanecendo tão sòmente o significado relativo de uns valores para os outros. Por isso se exige, para a conveniente aferição de umas pesagens em relação às outras, o profundo conhecimento dos problemas fundamentais da profissão, além das diferentes actividades disponíveis na sociedade. Este é pois um aspecto melindroso, susceptível de controvérsia e exigindo necessàriamente permanente crítica na evolução temporal.

Importa notar que o conceito de plenitude nada tem que ver com o de felicidade, pois a quantificação introduzida refere-se apenas à maior ou menor presença dos problemas fundamentais da profissão em cada actividade dessa profissão, mas não se encontra muito desligado do sentimento de «realização profissional».

4. EQUAÇÃO DA PROFISSÃO

Estabelecidas as bases anteriores podem construir-se vários desenvolvimentos. Não nos interessam, por ora, dado o fim em vista ser a determinação de uma lei de correlação entre as actividades e as plenitudes.

Salienta-se porém que a quantificação postulada permite estudos de vária natureza utilizando a análise matemática.

Cita-se, por exemplo e porque se trata de uma generalização unificadora, a dedução da equação de uma profissão.

Para tal basta referir o quadro matricial anterior mas com os coeficientes de actividade reduzidos aos valores porcentuais, ou seja às plenitudes (Quadro II).

Actividade	Problemas fundamentais				
	B_1	B_2	. . .	B_p	Totais
A_1	T_{11}	T_{12}	. . .	T_{1p}	T_1
A_2	T_{21}	T_{22}	. . .	T_{2p}	T_2
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
A_n	T_{n1}	T_{n2}	. . .	T_{np}	T_n
Totais	T'_1	T'_2	. . .	T'_p	1

QUADRO II — Coeficientes de plenitude.

Definindo o *vector actividades*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_n \end{bmatrix} \qquad (4)$$

e o *vector problemas fundamentais*

$$\mathbf{B} = [\, T'_1 \; T'_2 \; . \; . \; . \; T_p \,] \qquad (5)$$

com a matriz dos coeficientes de amplitude como *matriz de transferência*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & . \; . \; . & T_{1p} \\ T_{21} & T_{22} & . \; . \; . & T_{2p} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ T_{n1} & T_{n2} & . \; . \; . & T_{np} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

deduz-se a *equação matricial da profissão*

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \,.\, \mathbf{A} \qquad (7)$$

correspondente ao *sistema de equações da profissão* que relacionam cada problema fundamental com as diversas actividades por meio de uma combinação linear cujos coeficientes são as plenitudes da matriz de transferência

$$B_k = T_{k1} A_1 + T_{k2} A_2 + \; . \; . \; . \; T_{kn} A_n \qquad (8)$$

onde $k = 1, 2, . \; . \; . \; , p$.

Como os problemas gerais se quantificaram pelos coeficientes T'_k e as actividades pelos coeficientes T_j será igualmente

$$T'_k = T_{k1} T_1 + T_{k2} T_2 + \; . \; . \; . \; T_{kn} T_n \qquad (9)$$

com $k = 1, 2, . \; . \; . \; , p$.

A equação (7) condensa de um modo simplicíssimo a questão complexa da quantificação da profissão.

5. FUNÇÃO PLENITUDE - ACTIVIDADE

Tomando a plenitude T como uma variável contínua e anàlogamente para a actividade A,

a função plenitude-actividade define-se num sistema de eixos rectangulares em que o eixo das abscissas constitui o domínio das actividades profissionais e o eixo das ordenadas as plenitudes profissionais respectivas.

As plenitudes, sendo valores quantificados, estão ordenadas na parte positiva do eixo.

Falta ordenar as actividades dentro do respectivo domínio na parte positiva do eixo das abscissas. Para isso estabelece-se o *critério* de hierarquia das actividades: o ordenamento das actividades de uma profissão corresponde ao decréscimo da plenitude profissional.

Em consequência deste critério a função plenitude-actividade é uma lei hiperbólica (fig. 2)

$$T = \frac{T_1}{A} \qquad (10)$$

onde T é a variável plenitude, A a variável actividade e T_1 uma constante que depende da natureza da profissão.

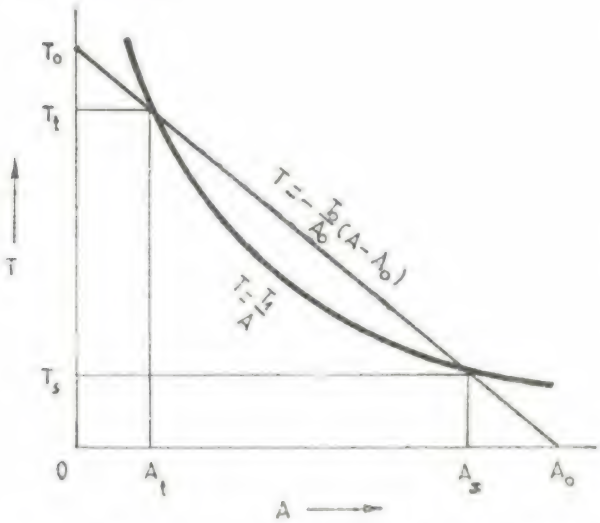


Fig. 2 — Representação gráfica da função plenitude-actividade T (A).

Considere-se o domínio das actividades compreendido entre 0 e A_0, o domínio das plenitudes entre 0 e T_0, designando-se A_0 e T_0 *valores extremos da profissão.*

Define-se a *função fronteira linear*

$$T = -\frac{T_0}{A_0}(A - A_0) \qquad (11)$$

que intersecta os eixos coordenados em A_0 e T_0. Esta recta limita a zona do plano plenitude-actividade em que é possível haver correspondência entre as actividades e as plenitudes, para uma profissão cujos limites de actividades e de plenitudes sejam respectivamente A_0 e T_0.

As intersecções das curvas expressas por (10) e (11) determinam os *pontos concretos limites* do espaço do plano em que correspondem actividades concretas, isto é, com significado científico e social.

Ao ponto concreto limite relativo à maior plenitude chama-se *ponto total* por corresponder à actividade total, quer dizer, com uma plenitude de 100 %.

O ponto concreto limite correspondente à menor plenitude poderá designar-se *ponto de subsistência* por corresponder à actividade de subsistência praticável na sociedade com o mínimo de plenitude sem deixar de exercer a profissão. O valor da plenitude de subsistência é função dos problemas fundamentais da profissão e do número de actividades diferenciadas.

O cálculo analítico destes pontos conduz à *equação característica da profissão*

$$A^2 - A_0 A + A_0 \frac{T_1}{T_0} = 0 \qquad (12)$$

sendo A real na condição $A_0 \geq 4\, T_1 / T_0$. No caso em que $A_0 = 4\, T_1 / T_0$ só há uma solução ($A = A_0/2$), isto é, a recta da função fronteira é tangente à hipérbole da função plenitude-actividade, o que corresponde a haver sòmente ama actividade praticável para essa profissão. Portanto a essa actividade única correspondem todos os problemas fundamentais e para além dela muda-se de profissão.

As actividades dentro do intervalo $[0, A_t]$ aberto à direita são transcendentes, definindo o *campo transcendente de actividades*, pois correspondem a valores de plenitude superiores a 100 %.

As actividades contidas no intervalo $[A_s, A_0)$ aberto à esquerda do domínio de uma profissão, relativos a valores de plenitude inferiores ao mínimo praticável (inferiores à plenitude de subsistência), são *actividades de mudança de profissão.*

Deste modo o domínio de actividades de uma profissão aparece constituído por três campos: transcendente, concreto e degenerescência (fig. 3).

Fig. 3 — Campos do domínio de actividades.

Os valores extremos A_0 e T_0 são os que correspondem à função fronteira. Mas nestes campos a função T(A) excede a fronteira. Resulta daqui o *3.º postulado* da teoria: a variação da função plenitude-actividade nos campos transcendente e de degenerescência é linear e de acordo com a função fronteira.

Estabelecidos estes conceitos fundamentais considere-se uma aplicação para exemplificação.

6. PROBLEMAS FUNDAMENTAIS DA ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

À engenharia electrotécnica apresentam-se os seguintes problemas essenciais: I — *Concepção* de equipamentos e de instalações; II — *Fabrico* de equipamentos; III — *Instalação* de equipamentos; IV *Exploração* e *manutenção* de equipamentos e de instalações.

Ao engenheiro electrotécnico cumpre criar e resolver as implicações destes problemas, constituindo assim a sua actividade completa dentro do domínio normal da profissão.

7. DOMÍNIO DE ACTIVIDADES DO ENGENHEIRO ELECTROTÉCNICO

São os problemas gerais definidos anteriormente que dão forma à profissão do engenheiro electrotécnico. As actividades socialmente estabelecidas que se preocupam com esses problemas constituem a população discreta do domínio de actividades da profissão em estudo.

O Quadro III indica os tipos de actividade disponíveis ao engenheiro electrotécnico, dentro da nossa sociedade, tendo-se estimado os coeficientes de actividade em relação a cada problema fundamental, que conduzem ao cálculo das respectivas plenitudes.

8. FUNÇÃO PLENITUDE-ACTIVIDADE DO ENGENHEIRO ELECTROTÉCNICO

De acordo com esta análise conclui-se:

a) O ensino corresponde à actividade total, pois a plenitude correspondente é de 100% visto ocupar-se indistintamente dos quatro problemas gerais;

b) A investigação científica ocupa o lugar seguinte na ordem de plenitudes decrescentes, apesar de se ocupar essencialmente apenas de um dos problemas fundamentais;

c) A montagem de instalações aparece a seguir como sendo a actividade prática mais completa;

d) A montagem de fabrico e a exploração surgem com quase igual valorização embora se ocupem de problemas distintos;

e) Os projectos de instalações e de fabrico têm òbviamente um valor semelhante em ocupações de natureza complementar;

f) A administração desce levemente, sendo difícil generalizar a correspondência com cada um dos problemas dada a diversidade de tipos de empresa pelo que se atribuiu um peso mais elevado no problema de concepção.

g) O comércio situa-se no lugar mais reduzido.

Estes resultados podem inferir-se imediatamente após a quantificação estabelecida pela teoria de quantificação das profissões anteriormente concebida.

Defina-se o 2.º postulado dando à predominância de um problema fundamental numa actividade o valor arbitrário 25, que se refere à percentagem visto que existem quatro problemas gerais. Analise-se agora cada correspondência actividade-problema e atribua-se um peso relativamente aos anteriores, construindo-se assim a matriz de plenitudes.

A representação gráfica da função plenitude-actividades baseando-se no 1.º postulado situa as actividades igualmente afastadas no domínio das actividades, e segundo o critério de hierarquias coloca as actividades por ordem decrescente de plenitudes.

Definiram-se nove actividades diferenciadas possíveis dentro da estrutura social. Introduzindo a meio do campo transcendente a actividade filo-

ACTIVIDADE		TIPO DE SERVIÇO ONDE SE EXERCE A ACTIVIDADE	PROBLEMAS GERAIS				T
TIPO	NATUREZA		I	II	III	IV	
Ensino	Formação profissional	Escolas técnicas médias e superiores	25	25	25	25	100
Investigação	Estudos e ensaios	Centros de Investigação. Laboratórios	50	12,5	2,5	0	65
Indústria (fabrico)	Projecto de fabrico	Secção de projecto em fábricas de material eléctrico	25	2,5	0	0	27,5
	Montagem de fabrico	Linhas de fabrico em fábricas de material eléctrico	5	25	2,5	7,5	40
Comércio (venda e compra)	Estudos técnico-económicos	Serviço técnico-comercial de empresas de venda de material eléctrico. Serviço de aquisição de materiais	10	2,5	5	2,5	20
Instalação (compra e venda)	Projecto	Gabinete de projectos para concurso Gabinete de estudos para execução	25	2,5	2,5	0	30
	Montagem	Serviço de montagens eléctricas	12,5	2,5	25	10	50
Exploração	Exploração e manutenção	Serviço de exploração e manutenção	5	2,5	2,5	25	35
Administração	Comando	Direcção de serviço. Administração técnica	20	0	0	2,5	22.5

QUADRO III — Domínio de actividade do engenheiro electrotécnico.

sofia da ciência electrotécnica, a variável teòricamente contínua A (actividade) acumula-se em dez pontos que caracterizam as dez actividades diferenciadas estabelecidas.

À actividade de subsistência $A_s = 10$ corresponde a plenitude $T_s = 20$, pelo quadro III. Então a função hiperbólica, que terá de passar por este ponto, determina a constante $T_1 = 200$. Deste modo a equação da função plenitude-actividade da engenharia electrotécnica é

$$T = \frac{200}{A} \qquad (13)$$

e portanto no ponto de actividade total, para $T_t = 100$, será $A_t = 2$, quer dizer a segunda actividade definida representa a actividade total, como era de esperar pois se introduziu uma actividade no campo transcendente. Efectuando a representação gráfica de função (13) constata-se um perfeito acordo com os valores arbitrados para as plenitudes (fig. 4).

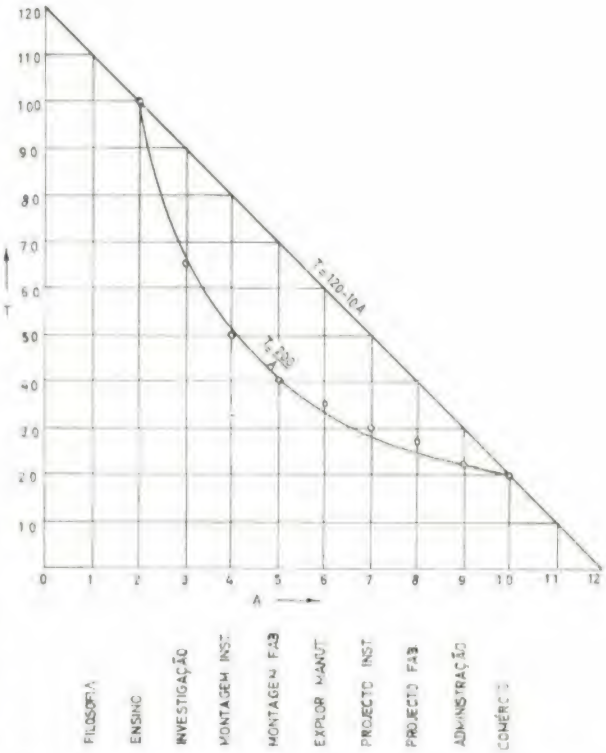


Fig. 4 — Função plenitude-actividade da engenharia electrotécnica.

9. CONCLUSÕES

A comparação da curva teórica, deduzida da teoria precedente, e os pontos relativos aos coeficientes estimados pela análise da natureza de cada actividade diferenciada e cada problema fundamental leva a concluir sobre a importância do método.

São discutíveis as pesagens atribuídas às actividades, pois o conhecimento dessas relações é em certo grau subjectivo. Contudo conjugando o raciocínio com um método estatístico, através da aplicação a uma população significativa, poder-se-ão determinar resultados bastante aceitáveis para cada profissão.

É igualmente evidente que as conclusões determinadas numa época histórica tenderão a modificar-se, por um lado devido à evolução da sociedade, e portanto da natureza das actividades diferenciadas, e por outro lado devido à evolução da profissão que com base no progresso científico altera os problemas fundamentais.

Dentro dos princípios enunciados convém notar a *ordenação das actividades* que se apresentam ao engenheiro electrotécnico dentro do campo concreto:

a) Ensino
b) Investigação
c) Montagem de instalações
d) Fabrico de equipamentos
e) Exploração e manutenção de instalações
f) Projecto de instalações
g) Projecto de equipamentos
h) Administração de empresas
i) Comércio de equipamentos.

Uma sociedade em que existam apenas actividades de baixa plenitude, por exemplo, comércio, trata-se de uma sociedade em que a profissão não está enobrecida. Inversamente, se existem actividades de elevada plenitude profissional, corresponde a um embiente social em que a profissão é exercida com grande aceitação.

Para satisfazer as actividades enunciadas é postulado que a sociedade esteja em condições de as realizar. Daí a necessidade rígida de evolução social: para se permitirem efectuar montagens de instalações e respectivos projectos (actividades 4 e 7) exige-se a laboração de fábricas para o fabrico de equipamentos e seus estudos (5 e 8), impõe-se a existência de orgãos para exploração e manutenção assim como administaação (6 e 9), e finalmente é imperativo o intercâmbio de produtos pela comercialização dos bens de produção (10).

Uma sociedade em que se verifique este mecanismo é uma sociedade em evolução. Mas o que mantém esse mecanismo? Só as actividades de grande plenitude profissional poderão impor a *continuidade da profissão*. E surgem assim a investigação e a pedagogia na nobre missão de geradores de plenitude. Para além delas existe o transcendente.

INSTITUTO NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO INDUSTRIAL

GRUPO DE FORMAÇÃO E APERFEIÇOAMENTO

Ciclo de Promoção da Formação na Empresa

A crescente necessidade de garantir-se um elevado nível de rentabilidade num contexto cada vez mais competitivo tem obrigado as empresas dos nossos dias a dedicarem um cuidado cada vez maior à preparação, à coordenação e ao controle de acções que visem o desenvolvimento e a adaptação dos seus recursos humanos.

Este ciclo foi preparado para permitir aos promotores dessas acções conceber programas eficientes, conduzir reuniões de formação segundo técnicas pedagógicas adaptadas a adultos e controlar a sua realização.

Interessa, portanto, aos chefes de pequenas e médias empresas, aos directores de pessoal ou serviços de formação bem como aos próprios condutores das acções, quer sejam chefes operacionais quer monitores de formação.

PFE. 2

A preparação pedagógica de monitores

12-16 e 19-23 de Outubro
das 9.00-1300 h.
Duração 40 horas

PFE. 3

Preparação de monitores de formação
LISBOA 23-27 de Novembro
9.30-12.30 e 14.30-17.30 h
Duração: 30 horas

MQ. 5

Aplicações estatísticas na actividade da empresa

Metodologia

— Cálculo das probabilidades. Teoria dos conjuntos. Análise combinatória (revisão). Fenómenos determinísticos e aleatórios. Teoria das probabilidades. Teoria axiomática das probabilidades.
— Variáveis aleatórias. Definições e propriedades. Funções de uma variável aleatória. Caracterização de variáveis aleatórias.
— Distribuições teóricas importantes. Distribuições descontínuas. Distribuições contínuas.
— Estatística descritiva. Apresentação dos dados e sua representação gráfica. Determinação dos valores característicos mais importantes duma distribuição.
— Teoria da amostragem. Definições e conceitos básicos. Teorema do limite central. Distribuições de funções da amostra: da média, da variância, da média de amostras duma população normal, de qui-quadrado, de variância empírica, de Student, de Snedecor. Controle da qualidade.
— Ensaios de hipóteses. Introdução. Definições. Ensaios de hipóteses simples. Ensaios de hipóteses compostas. Aplicações do critério de razão de verosimelhanças.
— Estimação. Estimação pontual. Estimação por intervalos. Intervalos de confiança.
— Correlação linear.
— Regressão linear.
— Teoria dos erros de observação.

Lisboa — 25 - 29 Maio
10.00 - 13.00 e 15.00 - 18.00 h
Duração — 30 horas

MQ. 6

Aplicações estatísticas na actividade da empresa

Estudos de Casos Reais

Curso essencialmente prático com a apresentação de exemplos diversos dentro dos seguintes temas:

— Construção de quadros de frequências e correlação. Cálculo de medidas descritivas empíricas: médias, variância, mediana e moda.
— Correlação e regressão simples. Erros de previsão.
— Determinação da dimensão de amostras e estratificação de populações.
— A utilização de conceito de valor esperado na resolução de problemas de gestão de stoks.
— Ensaios de hipóteses paramétricas. A importância do ensaio do qui-quadrado.
— Árvores de decisão.
— Controle estatístico da qualidade. Diagramas de controle.
— Sucessões cronológicas. Determinação e eliminação da tendência. Identificação e correcção das flutuações sazonais. Existência de flutuações cíclicas.
— Números índices. Sua importância nas aplicações correntes e suas limitações.

Ciclo de Informática e Gestão

IG. 3

Introdução à análise de sistemas

D — Estudos e implantação

Após um conhecimento considerado suficiente dos equipamentos que asseguram a realização do tratamento automático da informação, seguir-se-á em último capítulo, a descrição dos princípios que devem informar a análise de qualquer sistema no sentido de, criando-o em condições de satisfação para as empresas utilizadoras, permitir tirar o maior partido dos equipamentos que o servem.

Serão apreciadas em pormenor as etapas de um projecto de Análise de Sistemas, terminando este ciclo de seminários pela descrição de algumas aplicações práticas correntes, que servirão para concretizar os conhecimentos adquiridos.

D 1 — Estudos de Viabilidade
D 2 — Análise de Detalhe
D 3 — Lançamento em Execução

LISBOA — 9-11 Novembro
9 00-12-30 e 14.30-18.00

TINTA

ANTI-CORROSIVA ESPECIAL

Para a pintura de:

DEPÓSITOS DE ÁGUA POTÁVEL E OUTROS
CALDEIRAS
MÁQUINAS
TURBINAS
ESTRUTURAS ABAIXO DOS PAVIMENTOS
ISOLAMENTOS DAS TUBAGENS
ESTRUTURAS METÁLICAS
MATERIAL CIRCULANTE
GUINDASTES
POSTES
PAVIMENTOS DE AÇO, FERRO, MADEIRA, TIJOLO, PEDRA E CIMENTO EXPOSTOS AO TEMPO, ETC.

GRANDE RESISTÊNCIA AO CALOR

REPRESENTANTE:

MENDES DE ALMEIDA

COMÉRCIO E INDÚSTRIA, S. A. R. L.

AV. 24 DE JULHO, 52 LISBOA-PORTUGAL TEL. 667710

SKF

O maior fabricante mundial de rolamentos oferece-lhe agora, também outros produtos, dos quais destacamos:

Acoplamentos «KOPPERS»
Ferramentas de roscar
Grupos cônicos
Mangas de esferas «STAR»
Massa lubrificante
Material têxtil
Pontos rotativos
Redutores velocidade «SINCRON»
Retentores especiais «V-RING»
Retentores para indústria «RUBER»
Rodas e rodízios
Rolamentos de esferas, agulhas e roletes
Rótulas lisas
Tubos para condução de líquidos corrosivos incluindo água salgada
Variadores «SINCRON»

apoiados como sempre numa ASSISTÊNCIA TÉCNICA PERFEITA

SOCIEDADE **SKF** LIMITADA

Praça da Alegria, 66-A — LISBOA
Telefones 36 23 01-2-3-4

R. Delfim Ferreira, 604 — PORTO
Telefones 69 20 54-5-6-7-8